Jak wyznaczyć równanie stycznej?

Jak wyznaczyć równanie stycznej?

Źródło: Marvin Meyer, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pojęcie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest ściśle związane z pochodną funkcji f w punkcie x_0, bowiem tangens kąta nachylenia tej stycznej do osi X jest równy pochodnej funkcji f dla argumentu x_0.

Informacje zawarte w tym materiale pomogą Ci zdobyć umiejętność wyznaczania równania stycznej z wykorzystaniem pojęcia pochodnej funkcji w punkcie.

> **Twoje cele**
>
> - Wyznaczysz równanie stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie.
> - Wyznaczysz równanie stycznej o zadanych własnościach.

Przeczytaj

Gdybyśmy chcieli wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ w punkcie $(1, 0)$, korzystając z równania siecznej, byłoby to możliwe, ale uciążliwe.

Spróbujmy użyć zatem innych narzędzi. Zauważmy, że gdy w równaniu siecznej:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

przyjmujemy, że x_2 dąży do x_1, to współczynnik kierunkowy dąży do pochodnej funkcji f w punkcie x_1. Tym samym możemy od razu napisać równanie stycznej do wykresu różniczkowalnej funkcji f w punkcie (x_1, y_1) w postaci:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + y_1$$

albo równoważnie:

$$y = f'(x_1) \cdot x + b$$

gdzie $b = y_1 - f'(x_1) \cdot x_1$.

W przypadku funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$, jej pochodna wyraża się wzorem:
$f'(x) = 3x^2 - 8x$, wartość pochodnej dla $x_1 = 1$ wynosi (-5), więc styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(1, 0)$ będzie postaci:

$$y = -5(x - 1) + 0$$

albo równoważnie:

$$y = -5x + 5$$

Przykład 1

Wyznaczymy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - x^2 - x$ w punkcie $(0, 0)$
.

Rozwiązanie

Pochodna funkcji f jest równa: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, więc $f'(0) = -1$, zatem równanie stycznej ma postać:

$y = -1 \cdot (x - 0) + 0,$

czyli

$y = -x.$

Przykład 2

Wyznaczymy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 1 - x^3$ w punkcie $(0, 1)$.

Rozwiązanie

Mamy $f’(x) = -3x^2$, więc współczynnik kierunkowy stycznej będzie równy $a = f’(0) = 0$, zatem styczna w tym punkcie będzie równoległa do osi X i jej równanie będzie postaci:

$y = 1$.

Styczne o zadanych własnościach

Gdy przećwiczyliśmy wyznaczanie stycznych do wykresu w zadanych punktach, spróbujmy znaleźć styczne o zadanych parametrach i własnościach.

Przykład 3

Wyznaczymy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tak, by jej współczynnik kierunkowy był równy 6.

Rozwiązanie

Współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie (x_0, y_0) jest równy $a = f’(x_0)$, musimy zatem znaleźć taką wartość x_0, żeby $a = 6$.

Pochodna funkcji f jest postaci $f’(x) = 2x$, czyli otrzymujemy równanie $2x_0 = 6$, którego rozwiązaniem jest $x_0 = 3$.

Styczna w punkcie$(x_0, y_0) = (3, 9)$ jest postaci $y = 6(x - 3) + 9$, czyli: $y = 6x - 9$.

Przykład 4

Wyznaczymy równania takich stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x$, których współczynnik kierunkowy jest równy 10. Sprawdzimy również, czy istnieją styczne, których współczynnik kierunkowy jest równy (-10).

Rozwiązanie

Podobnie, jak poprzednio, musimy znaleźć takie argumenty, dla których pochodna jest równa 10.

Pochodna funkcji f jest postaci $f’(x) = 3x^2 - 2$, zatem musimy rozwiązać równanie:

$3x^2 - 2 = 10$,

co daje:

$x^2 = 4.$

Rozwiązaniami równania są liczby (-2) i 2, istnieją więc dwie takie styczne, które spełniają założenia zadania.

Będą to:

$y = 10(x+2) - 4$, czyli $y = 10x + 16$,

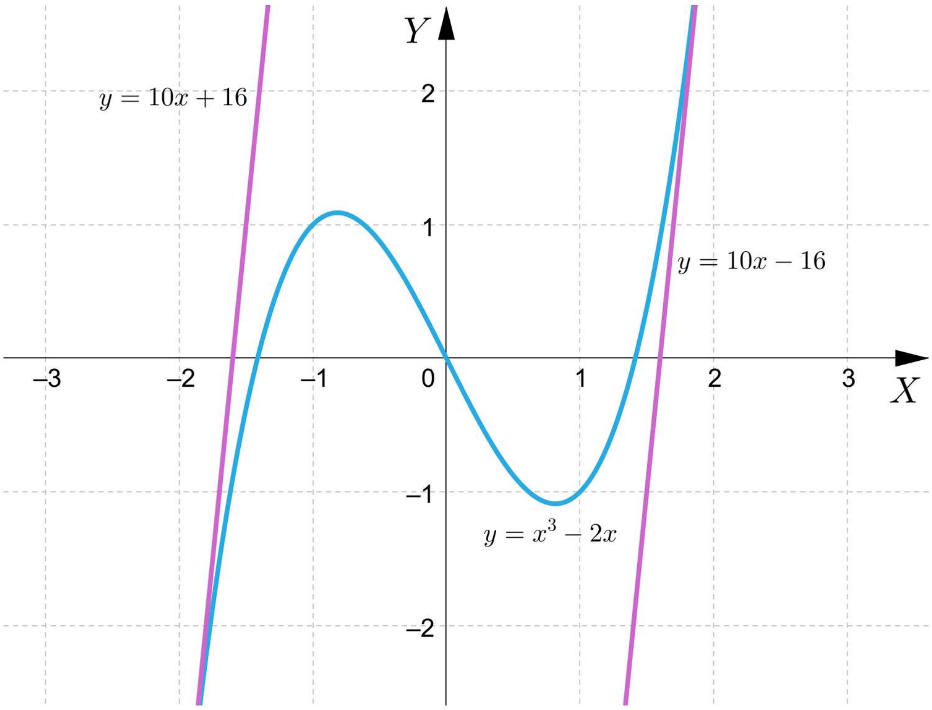
i

$y = 10(x-2) + 4$, czyli $y = 10x - 16$.

Spróbujmy teraz wyznaczyć równania stycznych, których współczynnik kierunkowy jest równy (-10).

Musimy w tym celu rozwiązać równanie $3x^2 - 2 = -10$, czyli $x^2 = -\frac{8}{3}$. Równanie to nie ma rozwiązania rzeczywistego, zatem nie istnieją takie styczne.

Jeżeli przeanalizujemy wykres funkcji f, to zauważymy, że najmniejszą wartość ma współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ i wynosi on $f'(0) = -2$.



Przykład 5

Wyznaczymy równania takich stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 3$, które przechodzą przez punkt $(0, -4)$.

Rozwiązanie

Założenie zadania oznacza, że współczynnik b wynosi (-4), czyli równanie stycznej będzie postaci $y = ax - 4$.

Prosta ta musi przechodzić nie tylko przez zadany punkt $(0, -4)$, ale również przez punkt styczności (x_0, y_0), czyli musi być spełniony warunek $y_0 = ax_0 - 4$.

Przez punkt styczności musi również przechodzić wykres funkcji f, czyli $y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 3$.

Współczynnik kierunkowy a wyznaczamy ze wzoru na pochodną $f'(x) = 2x$, czyli $a = 2x_0$.

Ostatecznie, łącząc powyższe informacje, otrzymujemy równanie, zawierające tylko jedną niewiadomą, postaci:

$x_0^2 - 3 = 2x_0 \cdot x_0 - 4,$

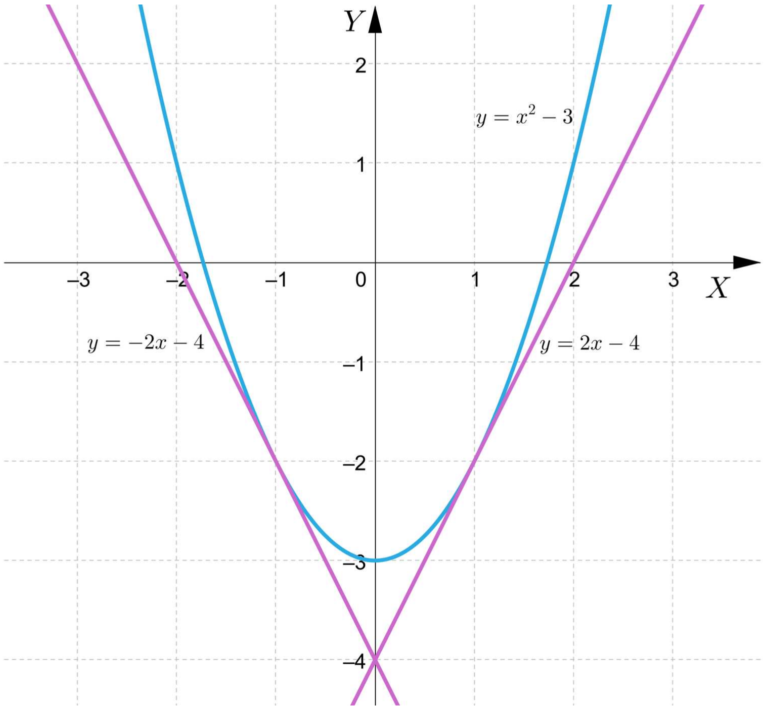
po redukcji wyrazów podobnych:

$x_0^2 = 1.$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_0 = 1$ lub $x_0 = -1$.

Wyznaczamy równania stycznych przechodzących przez punkt $(0, -4)$:

$y = -2x - 4$ i $y = 2x - 4$.



Spróbujmy teraz wyznaczyć równania stycznych, które mają więcej niż jeden punkt wspólny z wykresem funkcji. Styczna z definicji nie może mieć innych punktów wspólnych z wykresem w bliskim otoczeniu punktu styczności, ale może je mieć daleko od punktu styczności.

Przykład 6

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^3$, jej pochodna jest równa $f'(x) = 3x^2$, zatem współczynnik kierunkowy prostej stycznej w punkcie (x_0, y_0) będzie równy $a = 3x_0^2$, i wzór prostej stycznej będzie miał postać:

$$y = 3x_0^2 \cdot (x - x_0) + x_0^3$$

Zastanówmy się, czy istnieje inny punkt (x_1, y_1), należący do wykresu funkcji f, przez który przechodzi ta styczna.

Rozwiązanie

Punkt (x_1, y_1) musi należeć do wykresu funkcji f, zatem wiemy, że $y_1 = x_1^3$.

Ponadto punkt ten musi należeć do wyznaczonej stycznej, zatem wiemy, że:

$$y_1 = 3x_0^2 \cdot (x_1 - x_0) + x_0^3.$$

Łącząc te dwa fakty otrzymujemy równanie:

$$3x_0^2 \cdot (x_1 - x_0) + x_0^3 = x_1^3.$$

Po uporządkowaniu wyrazów i wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias równanie to przyjmuje postać:

$$(x_1 - x_0)^2 (x_1 + 2x_0) = 0,$$

czyli albo $x_1 = x_0$, co jest oczywistym rozwiązaniem tego równania, albo $x_1 = -2x_0$.

Otrzymaliśmy zatem drugi punkt przecięcia stycznej z wykresem funkcji: $(x_1, y_1) = \left(-2x_0, -8x_0^3\right)$, przy czym punkt ten ponownie pokrywa się z punktem (x_0, y_0), gdy $x_0 = 0$.

Przykład 7

Wykażemy, że nie istnieje styczna do wykresu funkcji $f(x) = |2x - 1|$ w punkcie $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Rozwiązanie

oczywiście nie istnieje pochodna funkcji $f(x) = |2x - 1|$ w punkcie $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, zatem nie możemy wykorzystać równania stycznej.

Wyznaczamy zatem sieczne do wykresu tej funkcji w pobliżu punktu $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

- jeżeli będziemy się do niego zbliżać z lewej strony, sieczne zawsze będą tej samej postaci: $y = -2x + 1$,
- gdy będziemy się zbliżać z prawej strony, to przyjmą inną, ale również cały czas tę samą postać: $y = 2x - 1$.

Tym samym nie istnieje możliwość ustalenia jednej stycznej, czyli takiej, która będzie miała w okolicy wyznaczonego punktu jeden punkt wspólny z wykresem oraz której wykres będzie przebiegał podobnie do wykresu funkcji.

Zatem, styczna do wykresu funkcji $f(x) = |2x - 1|$ w punkcie $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nie istnieje.

Słownik

styczna do krzywej

prosta, która w małym otoczeniu tego punktu ma przebieg zbliżony do przebiegu krzywej oraz ma w tym otoczeniu dokładnie jeden punkt wspólny z krzywą

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą galerią zdjęć interaktywnych i przeanalizuj raz jeszcze sposób wyznaczania stycznej do wykresu wielomianu i funkcji wymiernej.

Polecenie 2

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - x - 1$ w punkcie o odciętej $x_0 = -1$.

Polecenie 3

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$ w punkcie $(-3; -0,3)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć równanie stycznej?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie;
- wyznacza równanie stycznej o zadanych własnościach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- lekcja odwrócona;

- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Uczniowie przed lekcją zapoznają się ze wstępem oraz Przykładami 1 i 2 z sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicję siecznej i stycznej do wykresu funkcji. Wskazany uczeń zapisuje na tablicy równanie stycznej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć. Wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy treści Przykładów 3 – 5 z sekcji „Przeczytaj” i omawia ich rozwiązanie.
2. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel pyta wybranych uczniów o odpowiedzi i rozwiązania, pozostali uczniowie dyskutują nad poprawnością przedstawionych rozwiązań. W razie potrzeby, korygują je.
3. Uczniowie oglądają Galerię zdjęć interaktywnych. Indywidualnie rozwiązują Polecenie 2 i Polecenie 3. Następnie zostają podzieleni na 4 – osobowe grupy. W obrębie grupy sprawdzają wzajemnie rozwiązania i dyskutują nad wyborem ich zdaniem poprawnego sposobu. Jeden z uczniów przedstawia poprawne rozwiązania na tablicy.
4. Uczniowie pozostają w podziale na grupy. Rozwiązują ćwiczenia 6 – 8 z sekcji „Sprawdź się”. Wskazani przez nauczyciela uczniowie przedstawiają rozwiązania na tablicy.
5. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenie 5 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Równanie ogólne prostej
- Pochodna funkcji w punkcie
- Pochodne funkcji elementarnych

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub w czasie realizacji tematu: „Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji”.