



# Nierówności stopnia pierwszego

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), film, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Zawartość tekstowa - przykłady nierówności pierwszego stopnia, definicja nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, rozwiązywanie nierówności, nierówności równoważne.

Film - sposób rozwiązywania nierówności, przykłady rozwiązywania nierówności.

Ćwiczenia - zaznaczanie zbioru rozwiązań nierówności na osi liczbowej, wskazywanie liczb spełniających nierówność, nierówności równoważne, nierówności opisujące sytuacje przedstawioną w zadaniu, rozwiązywanie nierówności, rozwiązywanie zadań tekstowych z wykorzystaniem nierówności.

# Nierówności stopnia pierwszego

---

Nierówność otrzymamy, jeżeli między dwa wyrażenia algebraiczne wstawimy jeden ze znaków  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ .

Nierównościami z jedną niewiadomą są np.:

$$-4x + 6 \geq x - 4, 3x^2 + 5 > x - 1, a^3 + 3 \leq a^2.$$

W tym dziale zajmować się będziemy rozwiązywaniem nierówności pierwszego stopnia (czyli liniowych) z jedną niewiadomą, np.:

$$x \leq 0, 2x - 3 < 7, 1 - 3x \geq 2x + 2.$$

## Definicja: Nierówność pierwszego stopnia (liniowa) z jedną niewiadomą

Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą nazywamy nierówność, w której występuje dokładnie jedna niewiadoma w pierwszej potęgze.

Na przykład:

$$5x + 3 \leq x - 1, -x + 3 > 9, 2x + 4 \leq -x + 8, 7y - 1 > 9,$$

$$2(z - 3) \leq 7, (-6t - 6) : (-2) \geq 2t.$$

## Definicja: Liczba spełniająca nierówność (rozwiązanie nierówności)

Mówimy, że liczba spełnia daną nierówność, jeżeli po wstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu wskazanych działań otrzymamy nierówność liczbową prawdziwą.

Na przykład:

Sprawdzimy, czy liczba  $-10$  spełnia nierówność  $5x + 3 < x - 1$ .

Podstawmy  $-10$  w miejsce  $x$ .

$$5(-10) + 3 < -10 - 1$$

$$-47 < -11.$$

Nierówność jest prawdziwa.

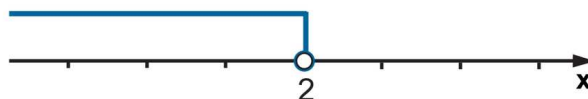
Liczba  $-10$  spełnia daną nierówność. Liczba  $-10$  jest jednym z rozwiązań nierówności.

**Definicja: Zbiór rozwiązań nierówności**

Zbiór rozwiązań nierówności jest to zbiór wszystkich liczb, które spełniają daną nierówność.

**Przykład 1**

$$\begin{aligned} 2x &< 4 \quad / :2 \\ x &< 2 \end{aligned}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

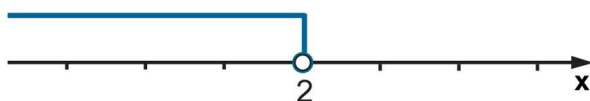
**Definicja: Nierówności równoważne**

Nierówności liniowe nazywamy równoważnymi, jeżeli posiadają ten sam zbiór rozwiązań.

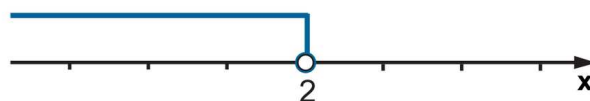
**Przykład 2**

Nierówności równoważne.

$$\begin{aligned} 2x &< 4 \quad / :2 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

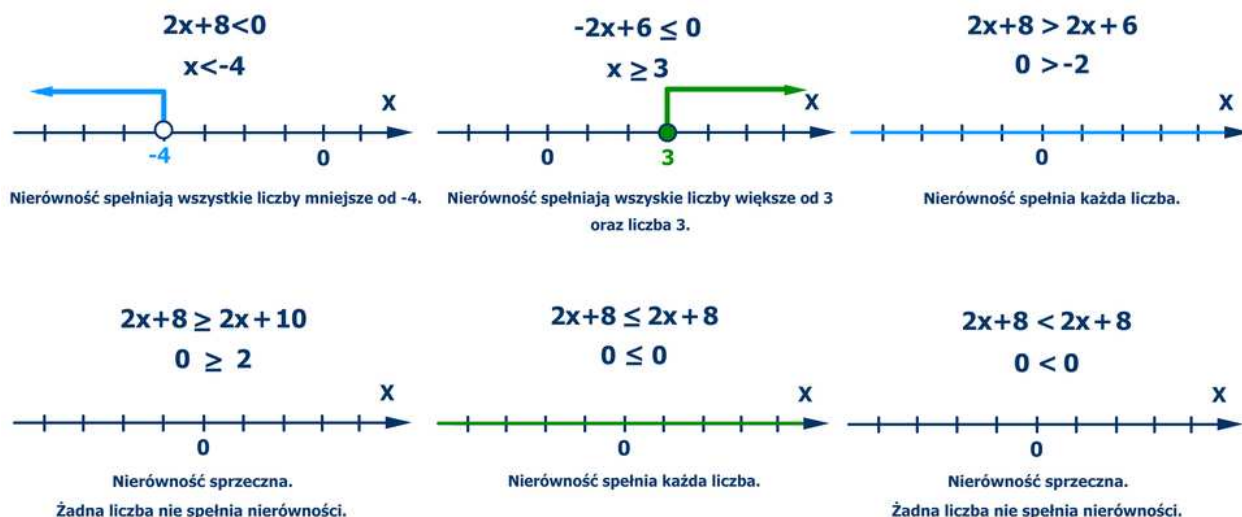


$$\begin{aligned} 4x + 3 &< 3x + 5 \\ 4x - 3x &< 5 - 3 \\ x &< 2 \end{aligned}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Rozwiązywanie nierówności liniowych



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R49l5TNwionMC](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób możemy rozwiązywać nierówności liniowe.

Podczas rozwiązywania nierówności postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań. Należy jednak zwrócić uwagę na mnożenie i dzielenie obydwu stron nierówności przez liczbę ujemną.

### Zapamiętaj!

Rozwiązać nierówność to znaczy znaleźć wszystkie liczby, które spełniają tę nierówność lub wykazać, że nierówność nie ma rozwiązań. W tym celu możemy przekształcać nierówności równoważnie, pamiętając o tym, że:

- do obu stron nierówności możemy dodać lub od obu stron nierówności możemy odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, pamiętając o zmianie znaku nierówności na przeciwny.

## Ćwiczenie 1



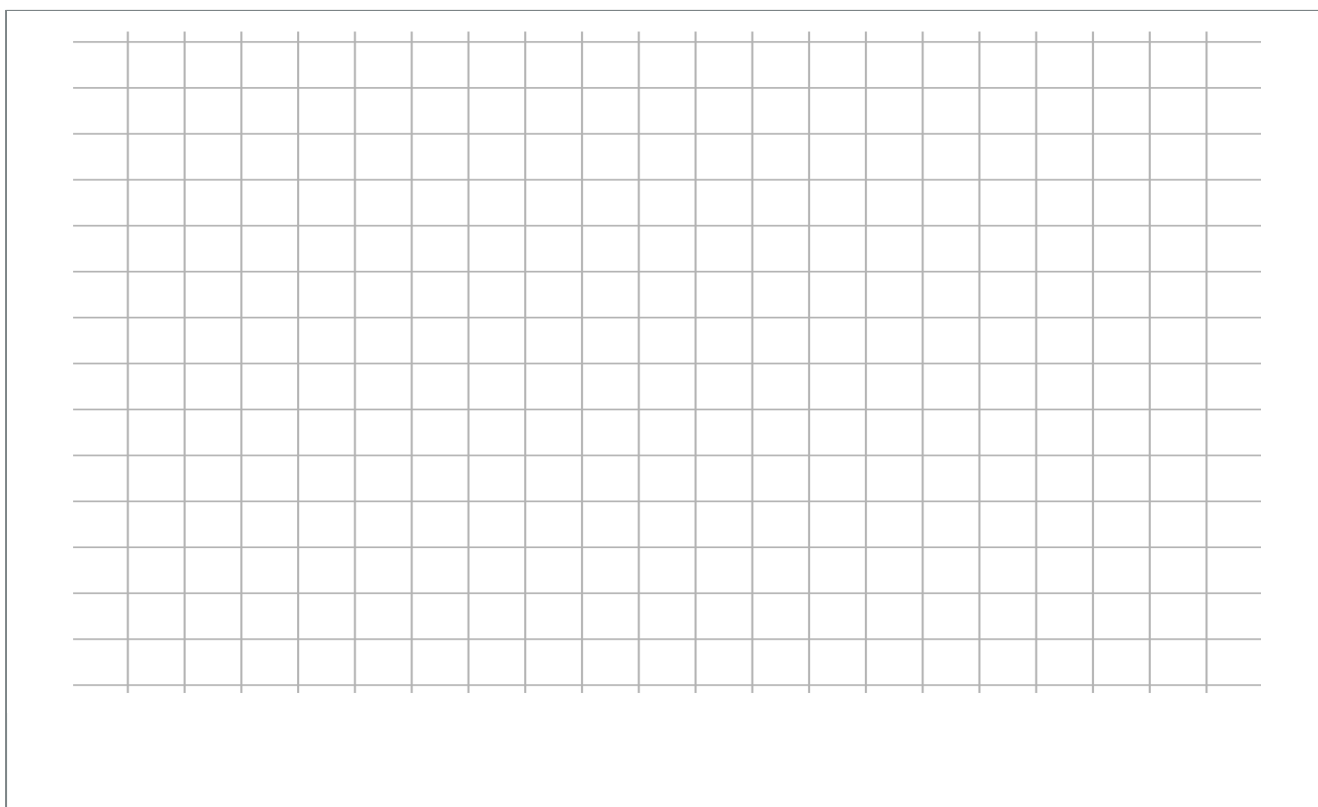
Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających daną nierówność.

1.  $x \geq 4$

2.  $x < 5$

3.  $2 \leq x < 5$

4.  $-2 < x \leq 3$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

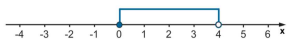
## Ćwiczenie 2



Dopasuj nierówność, której zbiór rozwiązań zaznaczony jest na osi liczbowej.



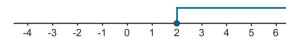
$x \geq 2$



$x < 4$



$0 \leq x < 4$



$-1 < x \leq 5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Przeciągnij liczby spełniające daną nierówność do odpowiednich grup.

$$x \geq 6,5$$

6

-5,001

4

$-5\frac{1}{5}$

8,3

5

$-2\frac{2}{3}$

4,25

-8

$$x < -5$$

$$-3 < x \leq 4,5$$

$$5 \leq x \leq 6$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4



Przeciągnij liczby spełniające daną nierówność do odpowiednich grup.

$$x \leq -1$$

8

7

$-1\frac{1}{3}$

-2

0

$7\frac{1}{4}$

5

$$x \geq 8$$

$$-1 < x \leq 0$$

$$1 \leq x < 8$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5



Rozwiąż nierówności i połącz je z odpowiednimi rozwiązaniami.

$$5x + 2(x - 4) > x - 2$$

$$x > 2$$

$$3(2x - 4) > -2 + x$$

$$x < 2$$

$$1 - 3(2x + 1) < 2x + 3$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$

$$2 - 3x \geq 1$$

$$x > 1$$

$$2x - 5(x - 2) \leq 3$$

$$x \geq 2\frac{1}{3}$$

$$2x + 1 < 5$$

$$x > -\frac{5}{8}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Połącz w pary nierówności równoważne.

$$-3x > 2x + 3$$

$$2x + 3(1 - 2x) > 1 - 3x$$

$$3x < 2x - 5$$

$$1 - 3x > 2(x + 2)$$

$$x < 2$$

$$2(1 - x) > 5$$

$$2x < -3$$

$$2 + 3(x + 1) < 2x$$

$$-2x < 4$$

$$1 - 2x < 3 - 2(1 - 2x)$$

$$1 + 2x > 1 - 2x$$

$$2x - 3 < 4x + 1$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Wyznacz nierówności równoważne do podanych. Uzupełnij nierówności, przeciągając w luki odpowiednie liczby i znaki lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- $2x > 8$  i  $4x > \boxed{\phantom{00}}$
- $x \leq 1$  i  $-2x \boxed{\phantom{00}} -2$
- $3x - 1 < 5x$  i  $2x \boxed{\phantom{00}} -1$
- $1 - x \geq 2 - x$  i  $1 \geq \boxed{\phantom{00}}$
- $x + 2 < 2x + 1$  i  $2x + 4 < \boxed{\phantom{00}}$
- $2 - 3x \leq 5$  i  $-6 + 9x \geq \boxed{\phantom{00}}$

$\leq$   $-15$   $<$   $4x + 2$   $16$   $2$   $>$   $-10$   $\geq$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Uzupełnij nierówności tak, aby otrzymać nierówności spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą. Przeciągnij w luki odpowiednie wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijanej.

- $3x + 2 > 3x + \boxed{\phantom{00}}$
- $2x - 3 \leq 2x + \boxed{\phantom{00}}$
- $3x + 2 > x + \boxed{\phantom{00}}$
- $x - 3 \leq 1 + \boxed{\phantom{00}}$

$x - 5$   $2x + 1$   $x$   $1$   $-2x$   $x - 4$   $2$   $x + 5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9



Uzupełnij nierówności tak, aby były sprzeczne, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijanej.

- $3x + 2 > 3x +$
- $2x - 3 \leq 2x +$
- $3x + 2 > x +$
- $x - 3 \leq 1 +$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10



Którą nierówność spełniają liczby 1, 2, 3, a nie spełniają 4, 5, 6? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $2(x + 2) < 10$

☐  $2(x + 2) \geq 10$

☐  $2(x + 2) > 10$

☐  $2(x + 2) \leq 10$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11



Jaka jest najmniejsza liczba całkowita spełniająca jednocześnie nierówność  $\frac{x}{2} + 3(x + 1) \geq 3$  i nierówność  $3 - 8(2 - x) < 2x$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ -3

☐ 0

☐ 1

☐ 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12



Wybierz nierówność opisującą następującą sytuację:

Tabliczka czekolady kosztowała  $x$  zł. Po podwyżce o 3 zł za 5 tabliczek trzeba zapłacić więcej niż za 6 tabliczek przed podwyżką. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $6(x + 3) < 5x$

☐  $6(x + 3) > 5x$

☐  $6x < 5(x + 3)$

☐  $6x > 5(x + 3)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 13



Rozwiąż nierówność i zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

a.  $2 + 3(x - 2) \geq 1$

b.  $3(x + 3) - 2(x - 2) < 5x$

c.  $2x - 3(1 - 3x) + 2 \geq -2(x + 2)$

d.  $3 - (2 - 3x) - 4(x - 2) > 5(1 - x) + 2x$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14



Rozwiąż nierówność i zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

a.  $\frac{x}{3} + \frac{2x+1}{2} \geq 2x$

b.  $\frac{x+3}{2} + \frac{1-x}{4} < 3(x+2)$

c.  $2x - \frac{x-3}{5} > 3 + \frac{1-3x}{2}$

d.  $3 - \frac{2-x}{3} - 2x \leq \frac{x+6}{5}$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 15



Rozwiąż nierówność  $-2(x + 2) \geq 2 + 3(x - 1)$ . Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 16



Rozwiąż nierówność  $2x - 3(x + 4) \leq -3x - 4$ . Podaj wszystkie liczby naturalne spełniające tę nierówność.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 17



Rozwiąż nierówność  $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \geq \frac{15-3x}{3} - \frac{1}{2}(x+4)$ . Podaj najmniejszą liczbę parzystą, która spełnia tę nierówność.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 18



Lena kupiła opakowanie mazaków za 3,80 zł i pewną liczbę kolorowych piłek po 2,30 zł za sztukę. Ile maksymalnie kupiła piłek, jeżeli z 15 zł otrzymała niewielką resztę?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 19



Wypożyczalnia nart „Stok” oferuje wypożyczenie nart w cenie 15 zł za każdy dzień. Wypożyczalnia „Ski” oferuje za pierwszy dzień wypożyczenia nart cenę 35 zł, a za każdy kolejny dzień stałą cenę 8 zł. Na jaką maksymalną liczbę dni trzeba wypożyczyć narty, aby bardziej opłacało się skorzystać z oferty wypożyczalni „Stok”?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 20



Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeżeli przestawimy cyfry w tej liczbie, to otrzymana liczba jest nie większa od początkowej liczby. Jaka to liczba? Ile jest takich liczb?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 21



Uporządkuj etapy rozwiązywania nierówności  $\frac{x-2}{3} - 4(2+x) > \frac{x}{2} - \frac{2x-3}{3}$ .

$$x < -2\frac{16}{21}$$



$$\frac{x-2}{3} - 4(2+x) > \frac{x}{2} - \frac{2x-3}{3}$$



$$-22x - 52 > 6 - x$$



$$2x - 4 - 48 - 24x > 3x - 4x + 6$$



$$-22x + x > 6 + 52$$



$$\frac{x-2}{3} - 8 - 4x > \frac{x}{2} - \frac{2x-3}{3}$$



$$-21x > 58$$



$$2(x-2) - 48 - 24x > 3x - 2(2x-3)$$



$$x < -\frac{58}{21}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.