



Różnica wektorów

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Różnica wektorów

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

W tym rozdziale omówimy graficzne odejmowanie wektorów. Tak jak w zbiorze liczb rzeczywistych, w zbiorze wektorów odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania. W praktyce oznacza to, że jeśli potrafimy już dodawać, to odejmowanie będziemy mogli zdefiniować przy pomocy dodawania...

Twoje cele

- Dodasz lub odejmiesz graficznie co najmniej dwa wektory.
- Przedstawisz wektor jako różnicę wektorów.
- Wykonasz działania dodawania i odejmowania więcej niż dwóch wektorów za pomocą metody trójkąta i równoległoboku.

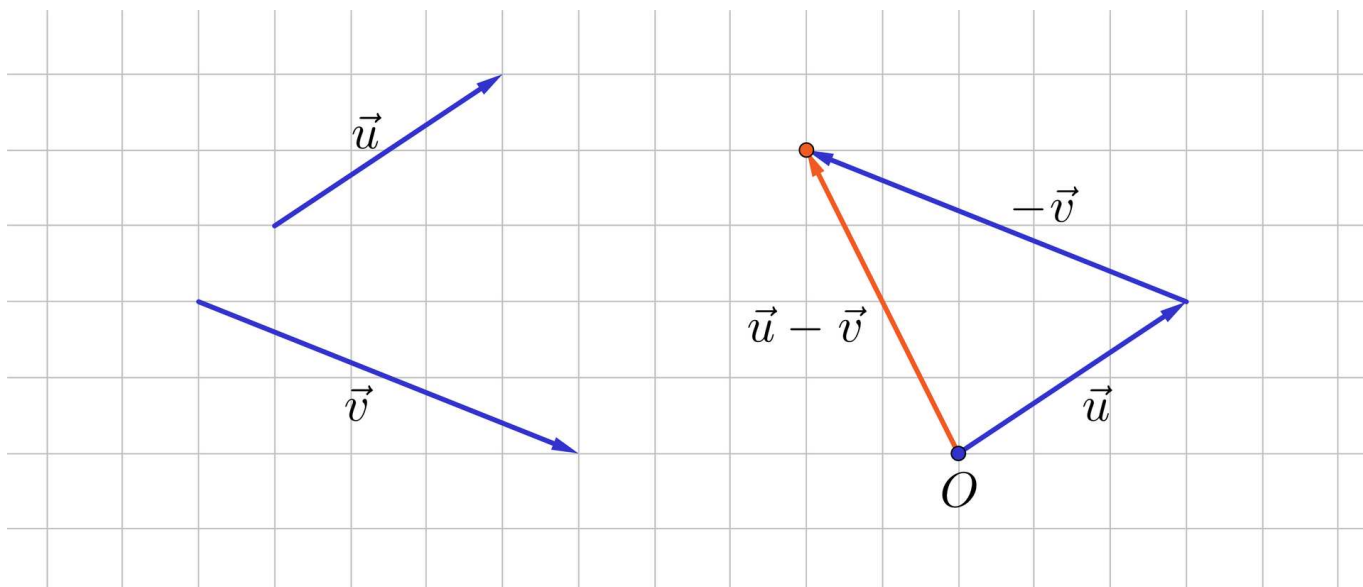
Przeczytaj

Przypomnijmy, że aby od liczby b odjąć liczbę a (czyli wykonać działanie $b - a$), wystarczy do b dodać liczbę przeciwną do liczby a (czyli wykonać działanie $b + (-a)$). Analogicznie definiujemy odejmowanie w zbiorze wektorów.

Aby od wektora \vec{u} **odjąć wektor** \vec{v} (czyli wykonać działanie $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$), wystarczy do wektora \vec{u} **dodać wektor przeciwny do wektora** \vec{v} (czyli wykonać działanie $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{w}$). Dla porządku przypomnijmy tutaj, że wektor przeciwny do wektora \vec{v} ma ten sam kierunek i długość, co wektor \vec{v} , ale przeciwny zwrot.

Różnica dwóch wektorów – reguła równoległoboku, reguła trójkąta. Skoro różnicę wektorów definiujemy poprzez sumę, to oczywistym wydaje się fakt, że do odejmowania wektorów można zastosować regułę równoległoboku i regułę trójkąta.

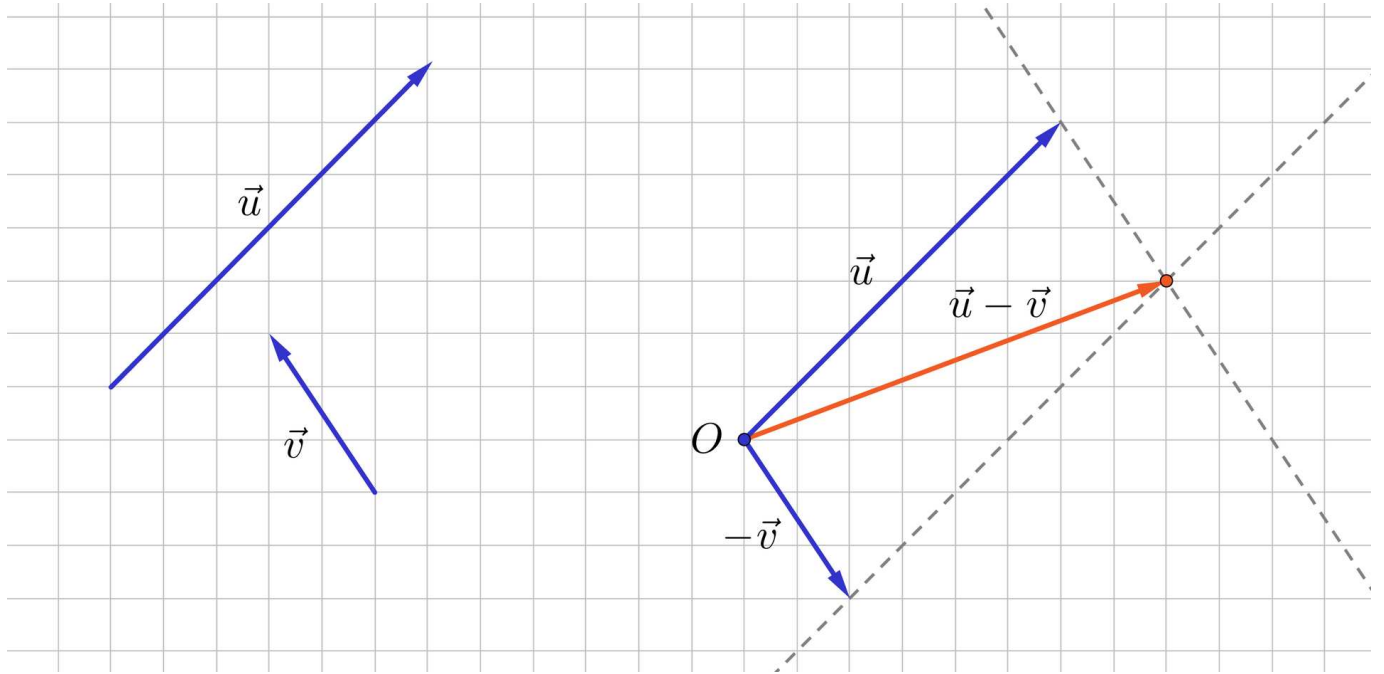
Aby wyznaczyć **różnicę wektorów** \vec{u} i \vec{v} działamy następująco: wybieramy dowolny punkt O , który będzie stanowił początek wektora \vec{u} . Na jego końcu zaczepiamy (umieszczamy) wektor $-\vec{v}$ (przeciwny do \vec{v}). Teraz, rysując odcinek od punktu O do końca wektora $-\vec{v}$, otrzymamy wektor $\vec{u} - \vec{v}$, który nazywamy różnicą wektorów \vec{u} i \vec{v} . Zauważmy, że po wyznaczeniu określonego uprzednio odcinka, otrzymujemy trójkąt.



Do wyznaczenia powyższej różnicy zastosowaliśmy **regułę trójkąta**, którą omówiliśmy szczegółowo w rozdziale dotyczącym dodawania wektorów.

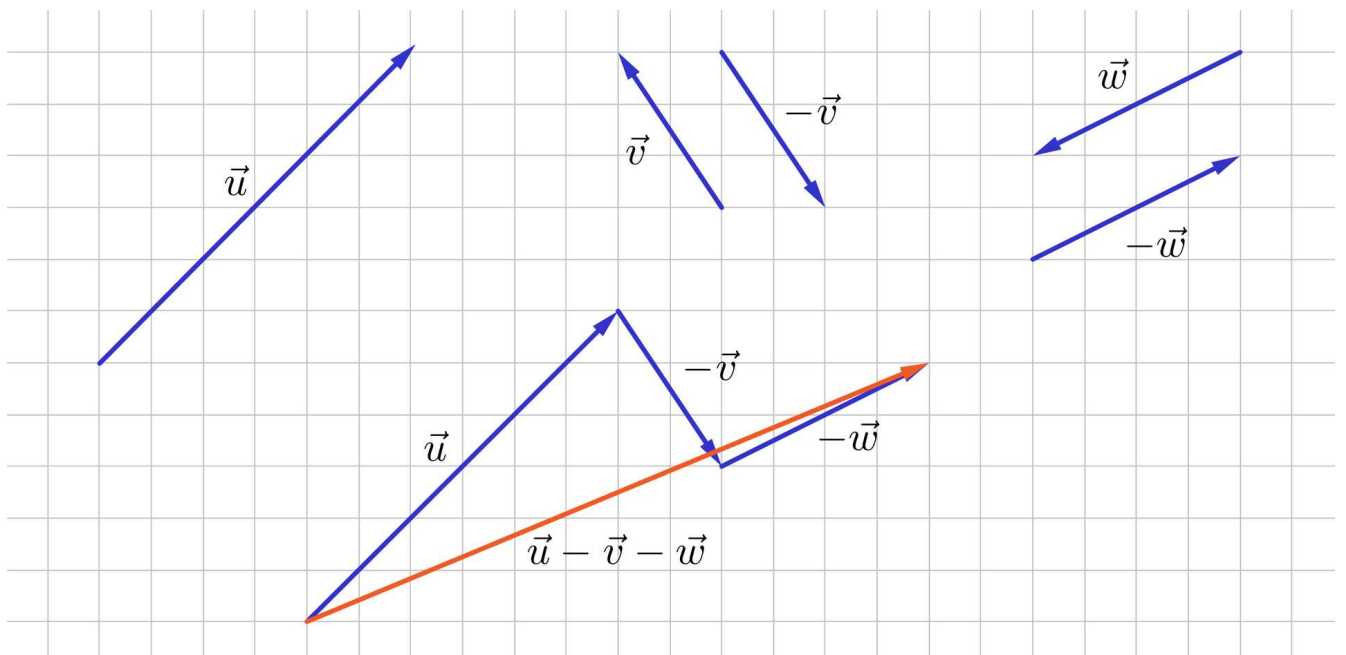
Aby wyznaczyć różnicę dwóch wektorów o różnych kierunkach, możemy też zastosować **regułę równoległoboku**, która orzeka, że wektor reprezentujący różnicę wektorów \vec{u} i \vec{v}

można uzyskać jako przekątną równoległoboku rozpiętego przez \vec{u} i $-\vec{v}$, czyli takiego, którego odpowiednie (widoczne na rysunku poniżej) boki możemy utożsamić z wektorami \vec{u} i $-\vec{v}$. Regułę równoległoboku również omówiliśmy szczegółowo w rozdziale dotyczącym dodawania wektorów, tutaj spójrzmy tylko na ilustrację poniżej:



Przykład 1

Wyznamy graficznie wektor $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$. Aby wykonać zadanie będą nam potrzebne wektory przeciwne do wektorów \vec{v} i \vec{w} . Po ich wyznaczeniu wystarczy zastosować regułę łańcucha i wykonać dodawanie $\vec{u} + (-\vec{v}) + (-\vec{w})$.



Zwróćmy jeszcze uwagę, że na wektorach możemy wykonywać operacje dodawania i odejmowania podobnie jak na liczbach czy wyrażeniach algebraicznych. Właściwości tych działań przenoszą się na wektory.

Dla przykładu rozważmy:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

do obu stron równania dodajemy wektor przeciwny do wektora \vec{v}

$$(\vec{u} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{w} + (-\vec{v})$$

korzystamy z łączności dodawania wektorów

$$\vec{u} + (\vec{v} + (-\vec{v})) = \vec{w} + (-\vec{v})$$

korzystamy z faktu, że suma wektora i wektora do niego przeciwnego jest wektorem zerowym

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{w} + (-\vec{v})$$

korzystamy z faktu, że wektor zerowy jest **elementem neutralnym dodawania** wektorów

$$\vec{u} = \vec{w} + (-\vec{v})$$

korzystamy z definicji odejmowania wektorów

$$\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

Obrazowo możemy powiedzieć (podobnie jak w równościach zawierających wyrażenia algebraiczne), że przenieśliśmy wektor \vec{v} na drugą stronę znaku równości ze zmienionym znakiem.

Słownik

różnica wektorów

jeśli określimy wektory jako uporządkowane pary punktów w przestrzeni

dwuwymiarowej, to różnicę wektorów $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$ określamy jako:

$\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2]$, co możemy też przedstawić za pomocą sumy wektora \vec{u} i wektora przeciwnego do \vec{v} , co zapisujemy: $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

element neutralny dodawania

elementem neutralnym dowolnego zbioru A jest takie $e \in A$, że dla dowolnego elementu a ze zbioru A zachodzi: $e + a = a$ oraz $a + e = a$, np.: w zbiorze liczb całkowitych \mathbb{Z} jest to zero, a w zbiorze wektorów to wektor zerowy

Animacja

Polecenie 1

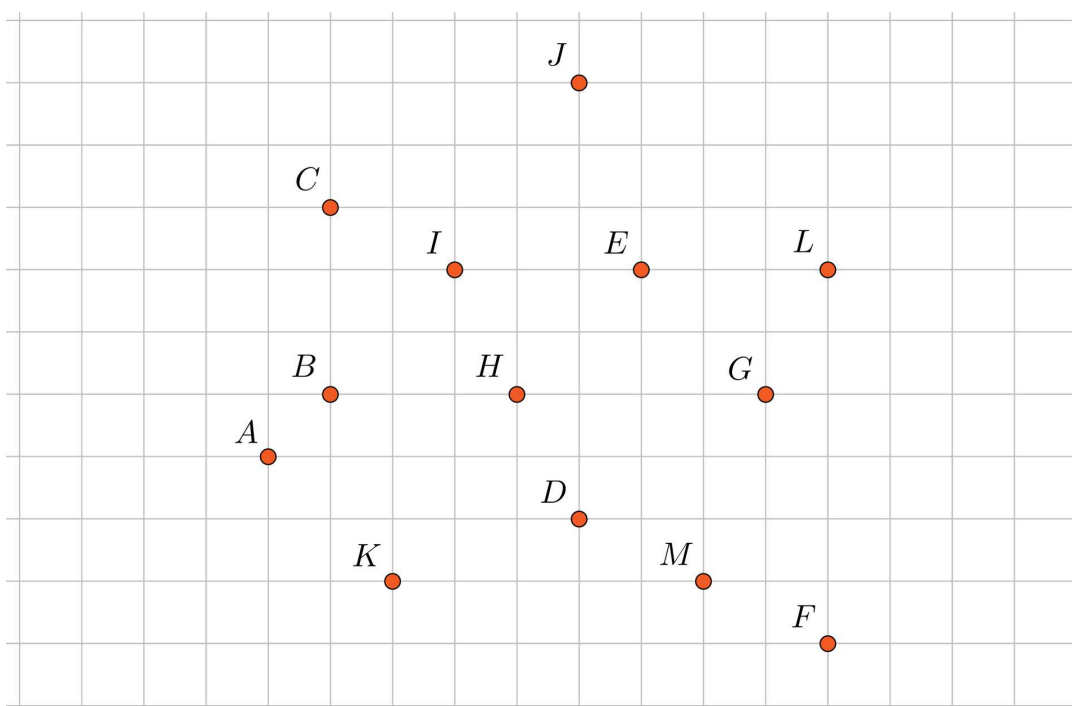
Zapozna się z filmem samouczkiem. Na jego podstawie rozwiąż poniższe zadanie.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej różnicy wektorów.

Polecenie 2

Na siatce zaznaczono kilkanaście punktów, które są początkami i końcami pewnych wektorów. Połącz w pary wektory równe.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Różnica wektorów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dodaje lub odejmuje graficznie co najmniej dwa wektory,
- przedstawia wektor jako różnicę wektorów,
- wykonuje działania dodawania i odejmowania więcej niż dwóch wektorów za pomocą metody trójkąta i równoległoboku,
- analizuje i porównuje metody trójkąta i równoległoboku,
- tworzy algorytm implementujący metody trójkąta i równoległoboku.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- eksperyment myślowy;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Różnica wektorów”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Różnica wektorów” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Różnica wektorów”).

Materiały pomocnicze:

- [E-podręczniki - W jaki sposób należy składać wektory?](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Różnica wektorów”.