



Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Pierwszy odpowiednik funkcji trygonometrycznych prawdopodobnie pojawił się w starożytnej Grecji, a była to cięciwa, odpowiadająca danemu łukowi. Wiele z twierdzeń trygonometrycznych było znanych starożytnym Grekom, jednak w postaci odpowiedników operujących długościami łuków i cięciw, a nie miarami kątów i stosunkami długości boków trójkąta. W trakcie lekcji omówimy związki występujące pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta.

Twoje cele

- Dowiesz się, jakie związki występują między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.
- Mając daną jedną funkcję trygonometryczną kąta, wyznacysz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
- Wykorzystasz związki między funkcjami trygonometrycznymi do rozwiązywania problemów matematycznych.

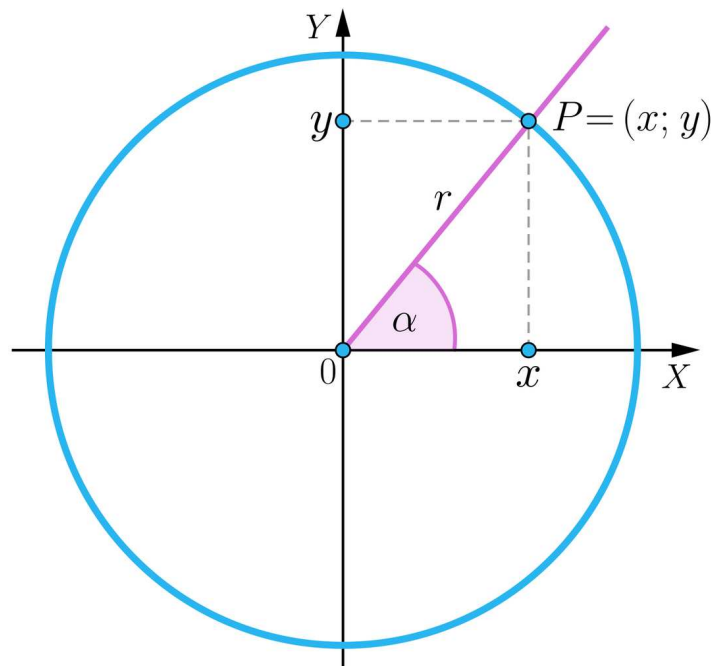
Przeczytaj

Już wiesz

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o promieniu r oraz kąt środkowy α .

Na ramieniu końcowym kąta α zaznaczamy punkt $P = (x; y)$.

Z własności trójkąta prostokątnego otrzymujemy, że $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- **Sinusem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.
- **Cosinusem** kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.
- **Tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

Z powyższych definicji otrzymujemy, że:

- $\sin \alpha = \frac{y}{r},$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r},$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$

Przykład 1

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i **tangens** kąta α , jeżeli na jego ramieniu końcowym leży punkt $P = (-3; -2)$.

Rozwiązanie:

Z podanych wcześniej zależności otrzymujemy, że $x = -3$, $y = -2$.

$$\text{Zatem } r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta otrzymujemy:

$$\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

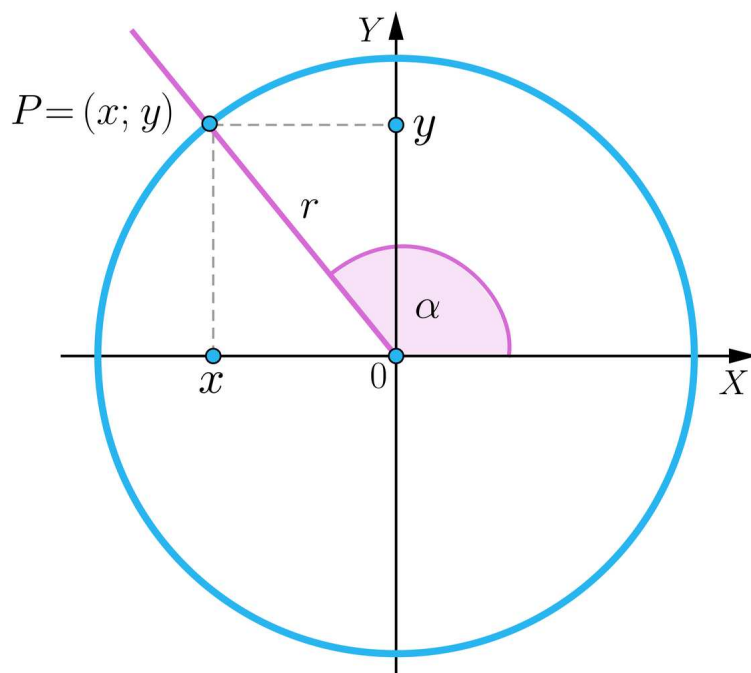
Ważne!

Jeżeli:

- $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, to $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$
- $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, to $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha < 0$,
- $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$, to $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$,
- $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$, to $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Twierdzenie: związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta

Dla dowolnego kąta α zachodzą następujące zależności:



a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna),

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Dowód

a) Z rysunku możemy odczytać, że: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ oraz $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

b) Z rysunku odczytujemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.

Z definicji sinusa oraz cosinusa kąta α otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Ważne!

Z twierdzenia wynika zależność: $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Przykład 2

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ oraz $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$.

Rozwiązanie:

Po podstawieniu do jedynki trygonometrycznej otrzymujemy, że $\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$.

Rozwiązując równanie otrzymujemy, że $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, zatem $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ponieważ $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$, więc $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

W związku z tym, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Przykład 3

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2$ oraz $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, otrzymujemy, że $2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, więc $\sin \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.

Otrzymałą zależność podstawiamy do jedynki trygonometrycznej. Otrzymujemy równanie:

$$(2 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

Zatem $5 \cdot \cos^2 \alpha = 1$, więc $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ponieważ $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie $\frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$.

Rozwiązanie:

Stosując zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi otrzymujemy:

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Przykład 5

Wyznamy wartość wyrażenia $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$, jeżeli $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ oraz $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

Rozwiązanie:

Po przekształceniu wyrażenie $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest postaci $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha$.

Wartość $\sin \alpha$ wyznaczymy z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej.

Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$

Z równania wynika, że $\sin^2 \alpha = \frac{24}{25}$, więc $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ lub $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ponieważ $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$, zatem $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Szukana wartość wyrażenia wynosi $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Przykład 6

Sprawdźmy, czy istnieje kąt α , dla którego $\operatorname{tg} \alpha = -3$ oraz $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

W celu sprawdzenia, czy istnieje taki kąt, wyznaczmy wartość $\sin \alpha$, a następnie wykorzystamy jedynkę trygonometryczną.

Otrzymujemy zatem: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Podstawiając, otrzymujemy równanie: $-3 = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{4}}$, więc $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$.

Sprawdzamy, czy zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Po podstawieniu mamy: $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} \neq 1$.

Zatem nie istnieje taki kąt.

Słownik

jedynka trygonometryczna

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

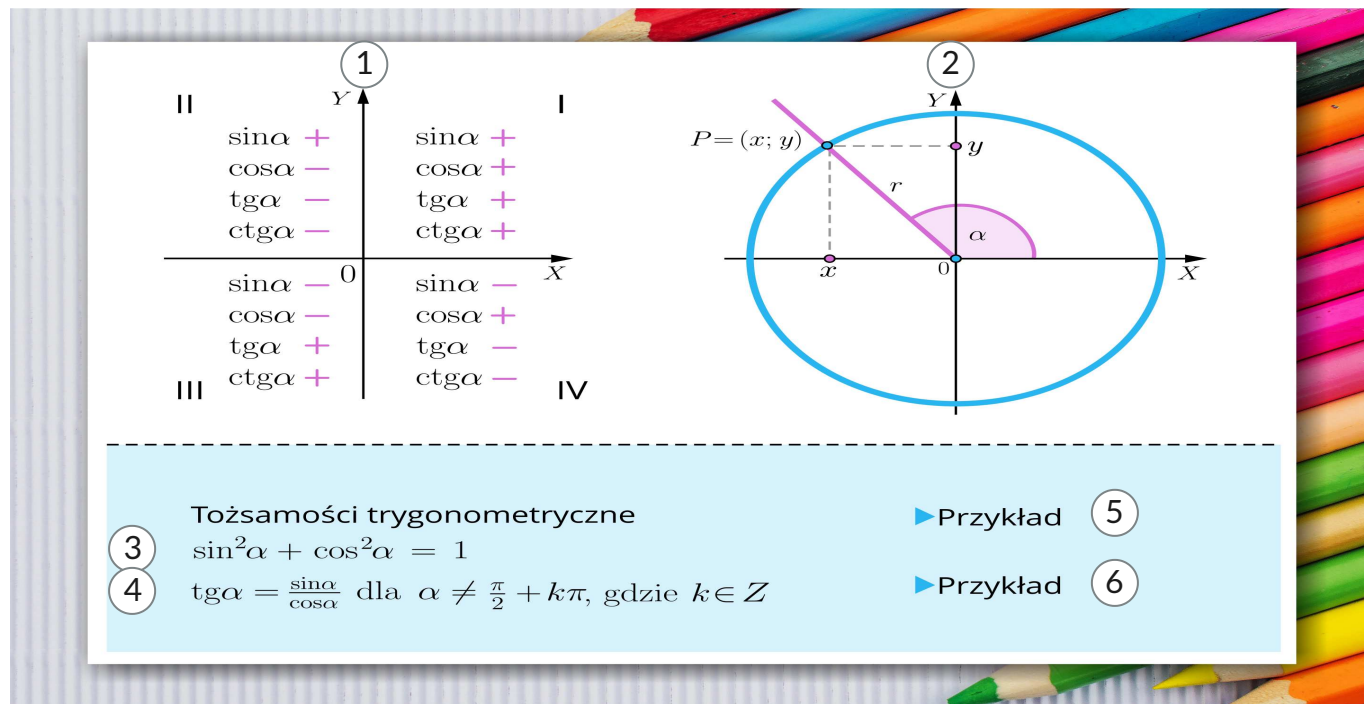
tangens dowolnego kąta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj infografikę, a następnie wykonaj polecenie.



1. Znaki funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych.

2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta obliczamy ze wzorów

$$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

3. Jedynka trygonometryczna

4. Tangens dowolnego kąta

5. Jeżeli na ramieniu końcowym kąta leży punkt $P = (-3; 4)$, to

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

6. {audio}Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta, jeżeli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy, że $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ lub $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

W których ćwiartkach układu współrzędnych może leżeć ten kąt?

Polecenie 2

a) Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

b) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli na jego ramieniu końcowym leży punkt $P = (1; -3)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$, to $\sin \alpha =$ oraz $\operatorname{tg} \alpha =$.

Ćwiczenie 2



Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = -3$ oraz $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, to:

☐ $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

☐ $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ i $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$

☐ $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ i $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary wartości funkcji trygonometrycznych dla tego samego kąta.

$$\sin \alpha = \frac{1}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 4



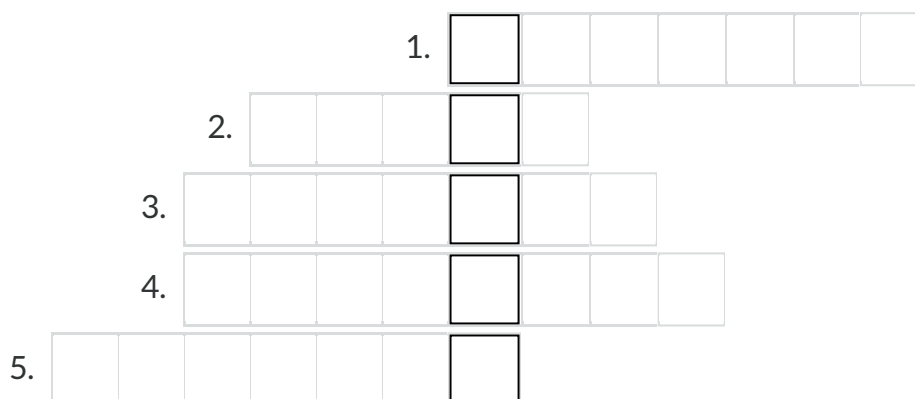
Wpisz odpowiednią liczbę.

Wyrażenie $\frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ po uproszczeniu jest równe .

Ćwiczenie 5



Rozwiąż krzyżówkę.



1. Jednostka miary kąta.
2. Początkowe lub końcowe kąta.
3. Jedna z funkcji trygonometrycznych.
4. Inaczej iloraz długości dwóch boków.
5. Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie w trójkącie prostokątnym.

Ćwiczenie 6



Czy istnieje kąt, dla którego $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$?

☐ NIE

☐ TAK

Ćwiczenie 7



Jeżeli na ramieniu końcowym kąta α leży punkt $P = (3; -3)$, to:

☐ $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\operatorname{tg} \alpha = 1$

☐ wartość $r = 3\sqrt{2}$

☐ $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje poznane związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej;
- upraszcza wyrażenia, w których występują funkcje trygonometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- z użyciem e-podręcznika;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Infografice i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów;
- arkusze szarego papieru.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przypomina podstawowe pojęcia dotyczące tematu lekcji: „Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta”, następnie wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu i przechodzi do weryfikacji wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązywania ćwiczeń w temacie: „Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta”.

2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się ...

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta”).

Materiały pomocnicze:

- [Tożsamości trygonometryczne](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta”.