Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego

Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego

Ilustracja z kostkami do gry.
Źródło: Alois Komenda, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Przypomnieliśmy już definicje pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia oraz uogólniliśmy je wprowadzając definicję pierwiastka z liczby nieujemnej. Omawiając pierwiastek sześcienny zwróciliśmy szczególną uwagę na fakt, że tym, co najbardziej odróżnia go od pierwiastka kwadratowego, jest jego dziedzina. Wiemy już, że pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej nie ma sensu w zbiorze liczb rzeczywistych, ale pierwiastek sześcienny nie ma takich ograniczeń – może się pod nim znaleźć dowolna liczba. Podobnie rzecz ma się w przypadku pierwiastków dowolnego stopnia nieparzystego.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję pierwiastka stopnia nieparzystego.
- Zastosujesz własności pierwiastkowania.
- Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka.

Przeczytaj

Zacznijmy od przypomnienia definicji pierwiastka sześciennego:

$\sqrt[3]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^3$, dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b

Innymi słowy pierwiastkiem trzeciego stopnia (sześciennym) z dowolnej liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do sześcianu daje liczbę a.

Analogicznie sytuacja wygląda dla pierwiastków dowolnego stopnia będącego liczbą nieparzystą większą od 1:

$\sqrt[2n+1]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^{2n+1}$, dla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Czyli pierwiastkiem nieparzystego stopnia $2n+1$ z dowolnej liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do potęgi $2n+1$ daje liczbę a.

Przykład 1

$\sqrt[3]{-125} = -5$, bo $(-5)^3 = -125$

$\sqrt[3]{125} = 5$, bo $5^3 = 125$

$\sqrt[5]{-32} = -2$, bo $(-2)^5 = -32$

$\sqrt[5]{32} = 2$, bo $2^5 = 32$

$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}$, bo $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{243}$

$\sqrt[7]{-0{,}0000128} = -0,2$, bo $(-0,2)^7 = -0,0000128$

$\sqrt[7]{0{,}0000128} = 0,2$, bo $0,2^7 = 0,0000128$

$\sqrt[9]{-1} = -1$, bo $(-1)^9 = -1$

$\sqrt[9]{1} = 1$, bo $1^9 = 1$

$\sqrt[9]{0} = 0$, bo $0^9 = 0$

Przykład 2

Wyrażenie $\sqrt[5]{x}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x, czyli dla $x \in \mathbb{R}$.

Ważne!

Przypomnijmy, że zbiór wszystkich liczb, dla których dane wyrażenie zawierające zmienną x ma sens liczbowy nazywamy dziedziną wyrażenia algebraicznego. Możemy zatem powiedzieć, że dziedziną wyrażenia $\sqrt[5]{x}$ (analogicznie dla każdego pierwiastka stopnia nieparzystego) jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Przykład 3

Ponieważ niewykonalne jest dzielenie przez 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[7]{x-1}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x-1 \neq 0$ (uwzględniamy przy tym fakt, że mianownik nie może być równy zeru, zaś pierwiastek sześcienny jest zerem tylko wówczas, gdy zerem jest liczba podpierwiastkowa), czyli dla $x \neq 1$.

Ponieważ mianownik ułamka nie może być równy 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[9]{x+2}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x+2 \neq 0$, czyli dla $x \neq -2$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[11]{x^2-4}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x^2-4 \neq 0$, czyli dla $x^2 \neq 4$. Oznacza to, że x nie może być równe ani 2, ani -2, co możemy zapisać jako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Przykład 4

$$\sqrt[7]{2^7} = \sqrt[7]{128} = 2$$

$$\sqrt[7]{(-2)^7} = \sqrt[7]{-128} = -2$$

$$\sqrt[5]{3^5} = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$\sqrt[5]{(-3)^5} = \sqrt[5]{-243} = -3$$

Zwróć uwagę, że niezależnie od tego, jaką liczbą jest x, prawdziwe są równości $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$ oraz $\left(\sqrt[2n+1]{x}\right)^{2n+1} = x$, dla liczb naturalnych dodatnich n. Przypomnijmy również, że równość, która jest prawdziwa dla każdego elementu dziedziny, nazywamy tożsamością.

Własność: Własności pierwiastkowania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnej liczby naturalnej dodatniej n zachodzą równości:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a \cdot b}$$

$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}}$, o ile $b \neq 0$

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

Przykład 5

$\sqrt[5]{-2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{-2 \cdot 16} = \sqrt[5]{-32} = -2$

$\frac{\sqrt[5]{729}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{729}{3}} = \sqrt[5]{243} = 3$

$\sqrt[5]{-96} = \sqrt[5]{-32 \cdot 3} = \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{3} = -2\sqrt[5]{3}$

Przykład 6

Korzystając z własności pierwiastkowania usuniemy niewymierności z mianowników następujących ułamków:

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{-3}} = \frac{1}{-\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{-\sqrt[5]{3 \cdot 3^4}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{-\sqrt[5]{3^5}} = -\frac{\sqrt[5]{81}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[7]{-8}} = \frac{1}{\sqrt[7]{-2^3}} = \frac{1}{-\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{-\sqrt[7]{2^7}} = -\frac{\sqrt[7]{16}}{2}$

Przykład 7

Aby dodać pierwiastki $\sqrt[5]{-160} + \sqrt[5]{-1215}$, możemy postąpić następująco:

$\sqrt[5]{-160} + \sqrt[5]{-1215} = \sqrt[5]{-32 \cdot 5} + \sqrt[5]{-243 \cdot 5} =$

$= \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{5} + \sqrt[5]{-243} \cdot \sqrt[5]{5} = -2\sqrt[5]{5} - 3\sqrt[5]{5} = -5\sqrt[5]{5}$

Przypomnijmy jeszcze, że dla dowolnej liczby a i dla liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość $a^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{a}$.

Słownik

pierwiastek nieparzystego stopnia

pierwiastkiem nieparzystego stopnia $2n+1$ z liczby a nazywamy taką liczbę b, której potęga o wykładniku $2n+1$ jest równa a, czyli $\sqrt[2n+1]{a} = b \Leftrightarrow a = b^{2n+1}$, dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz $n \in \mathbb{N}_+$

dziedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór tych i tylko tych liczb, dla których dane wyrażenie ma sens liczbowy

tożsamość

równość prawdziwa dla każdego elementu dziedziny

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje i przykłady zawarte w poniższej galerii zdjęć interaktywnych.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\frac{\sqrt[7]{128}\cdot\sqrt[5]{-32}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{64}}$,

b) $\sqrt[7]{-a^7-a^7-a^7-a^7}$,

c) $\sqrt[9]{a^{18}-a^{18}-a^{18}-a^{18}}$,

d) $\sqrt[6]{x^6+x^6+x^6}$.

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Wyłącz możliwie największy czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt[5]{a^5b^6x^7}$,

b) $\sqrt[3]{a^3x^6y^8}$,

c) $\sqrt[4]{a^4x^5y^6z^7}$, dla $x \geq 0$, $z \geq 0$,

d) $\sqrt[3]{a^3 + a^4 + a^5}$,

e) $\sqrt[5]{a^6 + a^7 + a^{10}}$.

Ćwiczenie 10

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zastosuje definicję pierwiastka stopnia nieparzystego;
- zastosuje własności pierwiastkowania;
- usunie niewymierność z mianownika ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego".
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych" - „Przeanalizuj informacje i przykłady zawarte w poniższej galeria zdjęć interaktywnych". Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-7 z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego" i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

- Działania na pierwiastkach

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Pierwiastek arytmetyczny stopnia nieparzystego”.