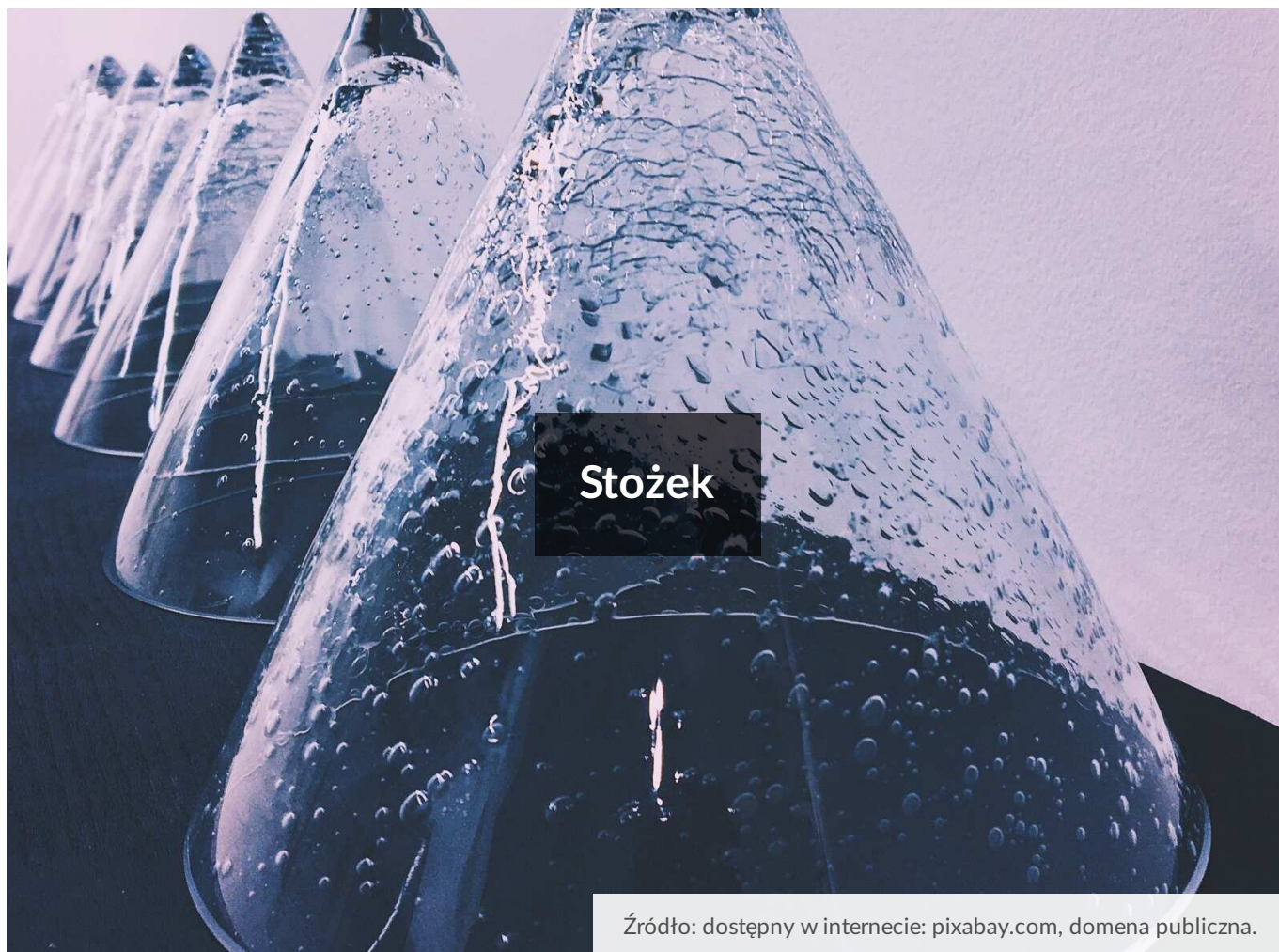




Stożek

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

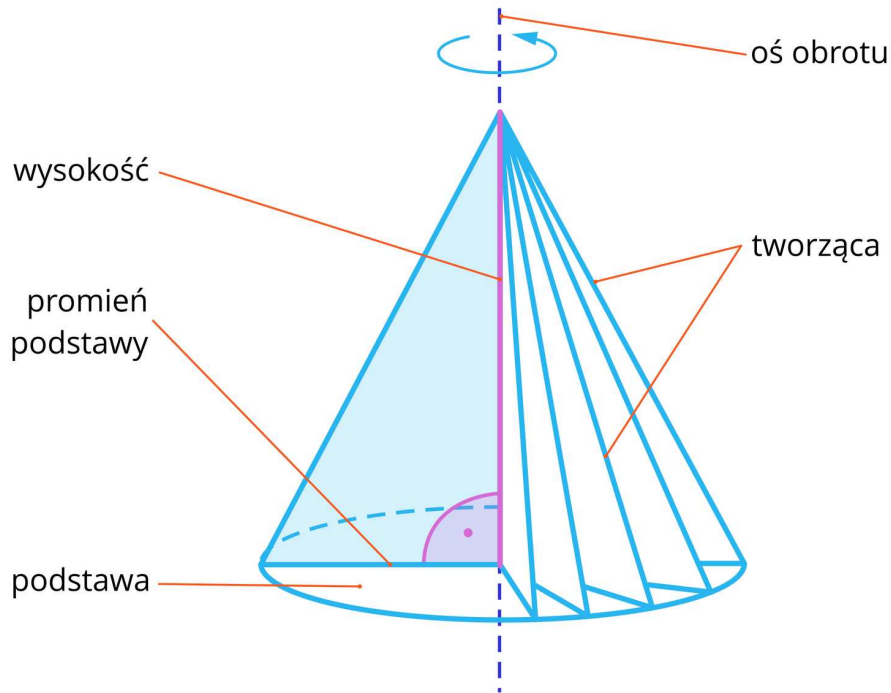
Kolejnym elementarnym przykładem bryły obrotowej jest stożek. Jego kształt kojarzy się zazwyczaj z dachem wieży lub różkiem. W tej lekcji przyjrzymy się pojęciom związanym ze stożkami oraz sposobowi otrzymywania stożków.

Twoje cele

- Dowiesz się, w jaki sposób powstaje stożek.
- Poznasz definicje składowych stożka.
- Opiszysz siatkę stożka.
- Wykorzystasz znane ci techniki do obliczenia długości promienia podstawy, wysokości lub tworzącej stożka.
- Dowiesz się, jak wykorzystywać miarę łukową do obliczeń związanych ze stożkiem.

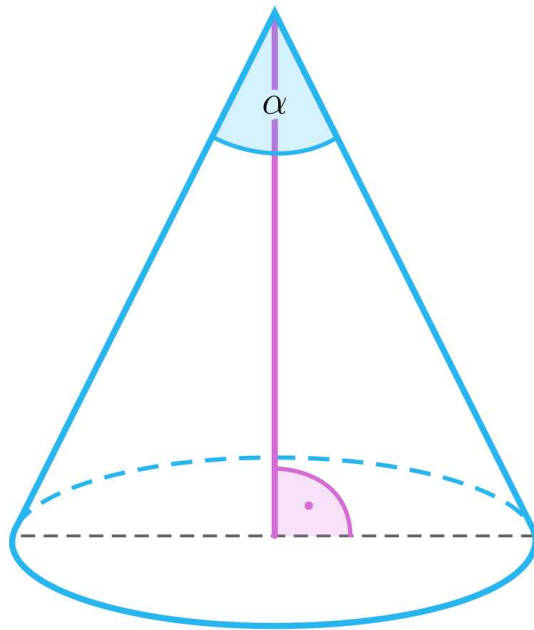
Przeczytaj

Stożkiem nazywamy bryłę geometryczną, która powstała przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną lub poprzez obrót trójkąta równoramiennego wokół prostej zawierającej jego oś symetrii.



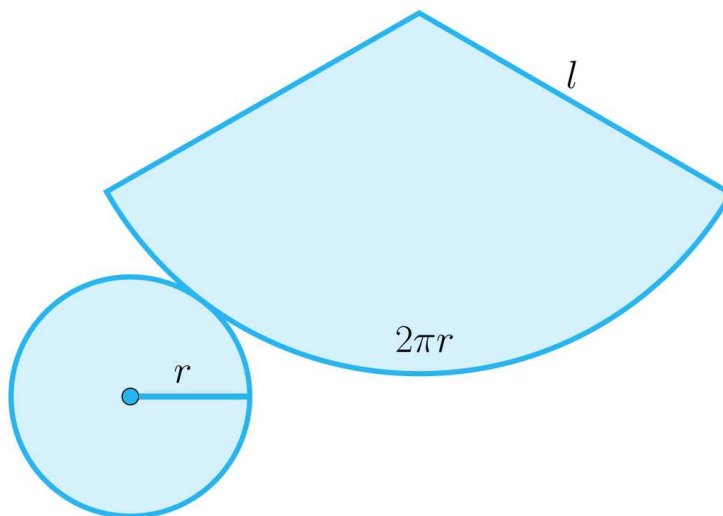
Prostą, wokół której obracamy trójkąt, nazywamy osią obrotu stożka. Bok trójkąta prostopadły do **osi obrotu** zakreśla koło, które nazywamy podstawą stożka. Z kolei bok trójkąta znajdujący się na przeciwko osi obrotu zakreśla **powierzchnię boczną stożka**. Wspólny koniec przeciwprostokątnej i przyprostokątnej zawartej w osi obrotu nazywamy wierzchołkiem stożka. Odcinek, którego jednym końcem jest **wierzchołek**, a drugim dowolny punkt okręgu podstawy nazywamy tworzącą stożka. Wysokość stożka to odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek, a drugim rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

Patrząc przekrój osiowy stożka widzimy trójkąt równoramienny, którego ramiona to tworzące stożka a podstawa to średnica podstawy.



Zaznaczony na rysunku kąt α nazywamy kątem rozwarcia stożka.

Rysunek poniżej przedstawia siatkę składającą się w stożek.



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła o promieniu l .

Przykład 1

Mamy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość $\sqrt{7}$ oraz $\frac{8}{3}$. Obliczymy pole **podstawy stożka** otrzymanego w wyniku obrotu tego trójkąta wokół:

a) dłuższej przyprostokątnej,

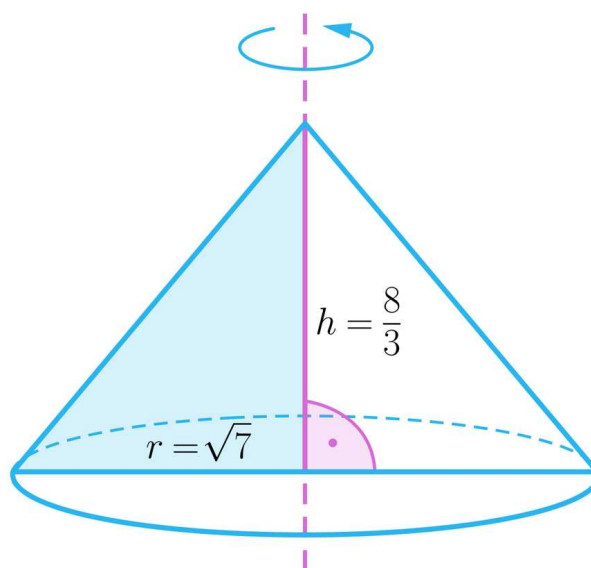
b) krótszej przyprostokątnej.

Obliczymy długość tworzącej w obydwu przypadkach.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\frac{8}{3} > \sqrt{7}$.

a) Jeśli stożek powstaje w wyniku obrotu wokół dłuższej przyprostokątnej, to jego wymiary są takie jak na rysunku poniżej.



Pole podstawy P_p jest wówczas równe:

$$P_p = \pi r^2 = \pi (\sqrt{7})^2 = 7\pi.$$

Z kolei długość tworzącej l wynosi:

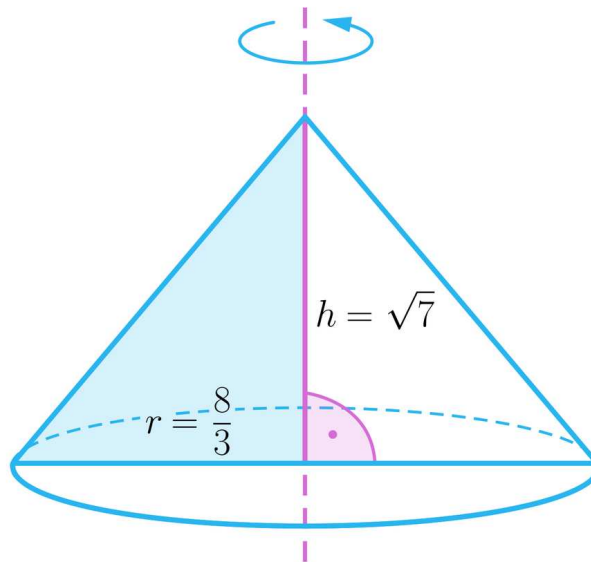
$$l^2 = (\sqrt{7})^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$l^2 = 7 + \frac{64}{9}$$

$$l^2 = \frac{127}{9}$$

$$l = \sqrt{\frac{127}{9}} = \frac{\sqrt{127}}{3}.$$

b) W tym przypadku nasz stożek wygląda tak:



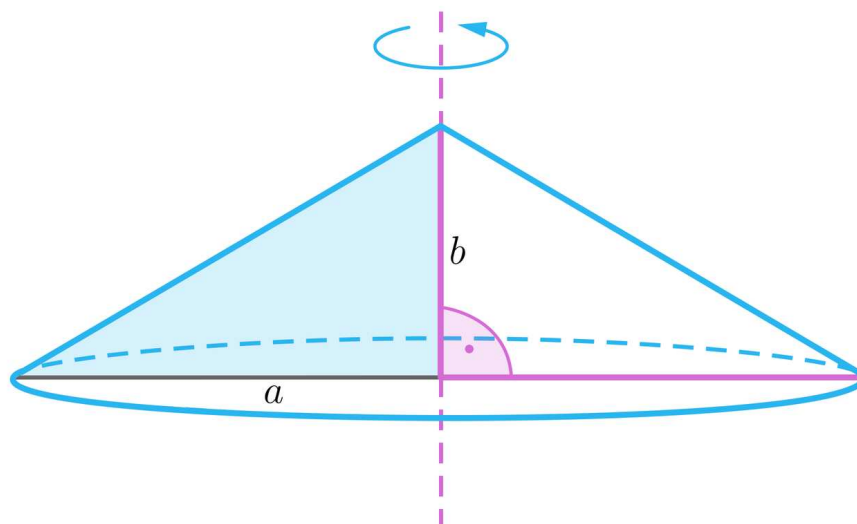
Zatem nasze pole podstawy wynosi:

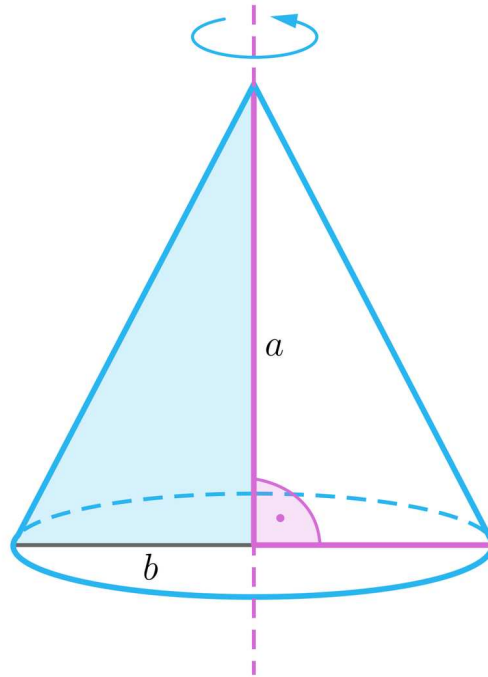
$$P_p = \pi r^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \pi = \frac{64}{9} \pi.$$

Z kolei długość naszej tworzącej się nie zmienia, więc ponownie wynosi $\frac{\sqrt{127}}{3}$.

Przykład 2

Rozważmy trójkąt prostokątny. Pola podstaw stożków powstałych w wyniku obrotu tego trójkąta wokół jego przyprostokątnych wynoszą 25π oraz 9π . Obliczmy długość tworzących obu stożków.





Rozwiązanie

Z pierwszego rysunku widzimy, że:

$$\pi a^2 = 25\pi$$

$$a^2 = 25.$$

Z drugiego mamy:

$$\pi b^2 = 9\pi$$

$$b^2 = 9.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy **tworzącą** równą:

$$a^2 + b^2 = l^2$$

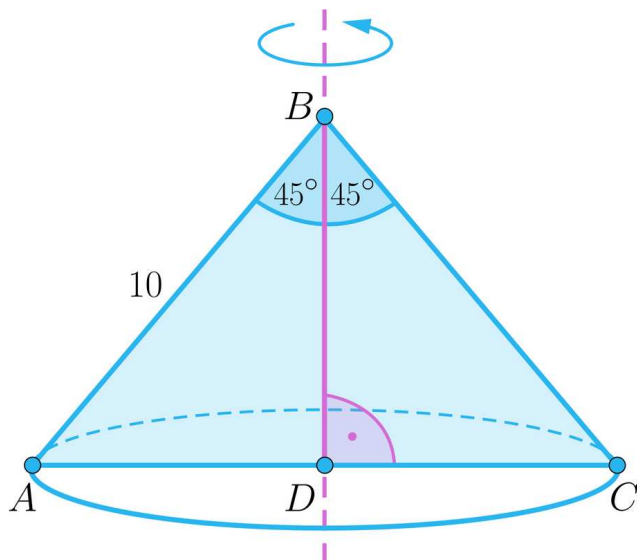
$$l^2 = 25 + 9$$

$$l = \sqrt{34}.$$

Zauważmy, że długość tworzącej nie zależy od wyboru przyprostokątnej wokół której obracamy trójkąt prostokątny.

Przykład 3

Stożek powstaje w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 10, wokół osi symetrii. Kąt pomiędzy ramionami wynosi 90° . Obliczmy promień podstawy oraz **wysokość** tego stożka.



Rozwiązanie

Widzimy, że trójkąt ABD jest trójkątem o stopniach 45° , 45° , 90° . Niech $|AD| = |BD| = a$. Wtedy z prostej trygonometrii wiemy, że:

$$a\sqrt{2} = 10$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

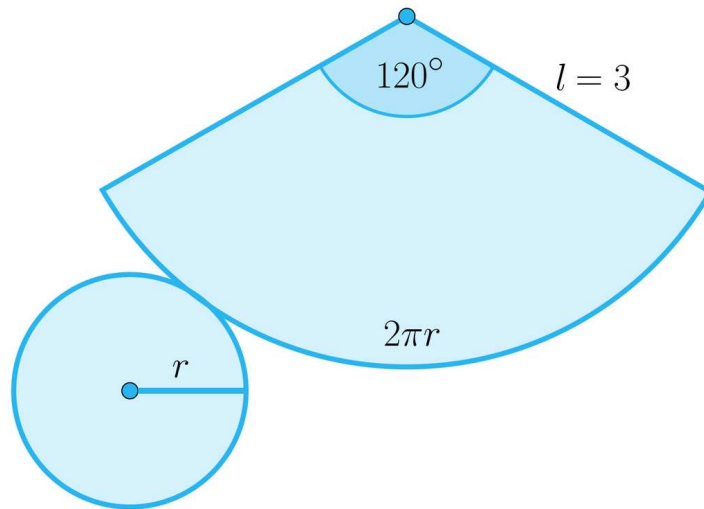
$$a = \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 5\sqrt{2}.$$

Zatem mamy, że wysokość i promień mają taką samą długość wynoszącą $5\sqrt{2}$.

Przykład 4

Promień wycinka kołowego o kącie 120° jest równy 3. Wycinek zwinięto i utworzono w ten sposób powierzchnię boczną stożka. Obliczmy wysokość i promień podstawy stożka.



Rozwiązanie

Zauważmy, że wycinek kołowy o kącie 120° jest $\frac{1}{3}$ całego koła. Zatem ze wzoru na obwód okręgu mamy:

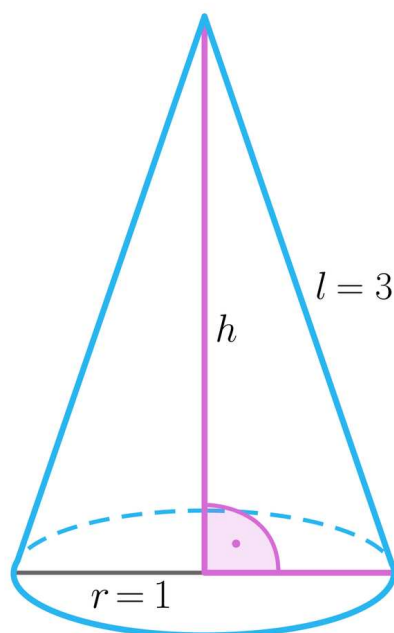
$$2\pi l \cdot \frac{1}{3} = 2\pi r$$

$$2\pi \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 2\pi r$$

$$2\pi = 2\pi r$$

$$r = 1.$$

Zwinąwszy powierzchnię w stożek, można przypuszczać, że będzie on wyglądał tak:



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy wysokość:

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2}$$

$$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Słownik

oś obrotu stożka

prosta, wokół której obracamy trójkąt

podstawa stożka

koło wykreślone przez bok trójkąta prostopadły do osi obrotu

powierzchnia boczna stożka

powierzchnia zakreślona przez tworzącą podczas obrotu wokół osi obrotu, po rozwinięciu przyjmuje kształt wycinka koła

wierzchołek stożka

punkt wspólny tworzącej i wysokości stożka

tworząca

odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim dowolny punkt okręgu podstawy

wysokość

odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek, a drugim rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

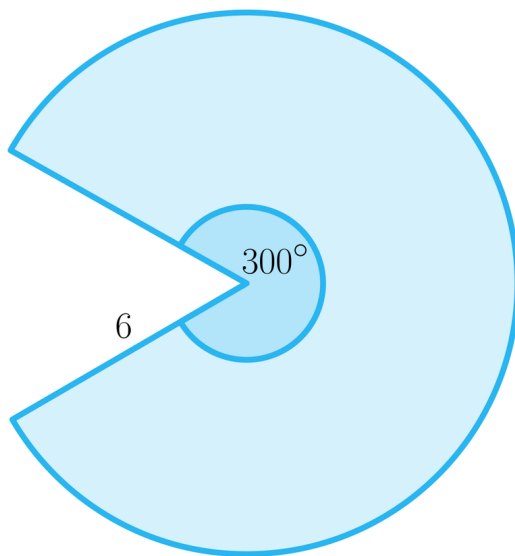
Przeanalizuj informacje zawarte w prezentacji multimedialnej, a następnie na ich podstawie rozwiąż poniższe polecenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dy8wz8TB8>

Polecenie 2

Na rysunku przedstawiona jest powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu. Obliczmy promień podstawy stożka r oraz jego wysokość h .



Polecenie 3

Wyznacz miarę kąta środkowego powierzchni bocznej stożka, jeśli wysokość stożka jest równa $2\sqrt{5}$, a promień podstawy wynosi 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Stosunek wysokości stożka do promienia podstawy wynosi $3 : 4$, a pole podstawy wynosi 36π . Oblicz długość tworzącej stożka.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeżeli stożek powstaje w wyniku obrotu trójkąta równobocznego wokół osi symetrii, to powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest półkolem.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Wąsik

Przedmiot: Matematyka

Temat: Stożek.

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje, w jaki sposób można otrzymać stożek,
- rozróżnia składowe stożka,
- opisuje siatkę stożka,
- wykorzystuje znane techniki do obliczenia długości promienia podstawy, wysokości lub tworzącej stożka,
- wykorzystuje miarę łukową do obliczeń związanych ze stożkiem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- ćwiczenia interaktywne i rozmowa nauczająca na podstawie treści zawartych w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgu omawiają praktyczne zastosowania brył obrotowych; podają przykłady stożków w życiu codziennym.
2. Nauczyciel omawia sposoby powstania stożka.
3. Nauczyciel omawia składowe stożka.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Po zaznajomieniu się nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości uczniów dotyczące treści animacji.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie polecenie nr 2, dotyczące animacji, a następnie wybrany uczeń omawia jego wykonanie na forum krok po kroku.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 1 – 6. Po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie rozwiązują zadania indywidualnie wykonując Ćwiczenia nr 7, 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie indywidualnie rozwiązują polecenie nr 3 z sekcji „Prezentacja multimedialna”.
2. Uczniowie dobierają się w pary i wymyślają sobie nawzajem zadanie analogiczne do ćwiczenia 7 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie je sobie nawzajem sprawdzają.

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe - stożek](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana przez uczniów podczas przygotowywania się przed sprawdzianem lub przy omawianiu tematów dotyczących kątów w stożku.