



Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W manuskryptach średniowiecznych można znaleźć zapisany problem, zwany zadaniem o podziale stawki. Wyobraźmy sobie, że dwaj gracze A i B umówili się, że kwotę np. 1000 zł zdobędzie ten, kto pierwszy wygra trzy partie (przy czym remisy uznaje się jako partie nierozstrzygnięte).

Grę musiano przerwać, gdy A wygrał dwie partie, a B jedną. Jak zatem należy podzielić ustaloną kwotę?



Grający w karty

Autor: Caravaggio

Rok wykonania: 1597

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Jakie masz propozycje?

Jeden z włoskich piętnastowiecznych matematyków L. Pacioli zaproponował, aby podzielić ustaloną kwotę proporcjonalnie do liczby rozegranych partii.

Natomiast w 1654 r. francuscy matematycy B. Pascal i P. Fermat podali inne rozwiązanie.

Ustaloną kwotę należy podzielić proporcjonalnie do prawdopodobieństwa wygranej w grze, tak jak gdyby jej nie przerwano. Pascal podał również wzór ogólny na podział ustalonej stawki. Jaki – pozostawiamy Twojej dociekliwości.

Teraz rozpoczniesz dopiero zgłębianie tajemnic rachunku prawdopodobieństwa. Poznasz kilka podstawowych pojęć i zależności.

Twoje cele

- Podasz przykłady doświadczeń losowych.
- Określisz zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego.
- Rozpoznasz zdarzenia pewne oraz zdarzenia niemożliwe.
- Określisz zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu.

Przeczytaj

Doświadczenie losowe

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się analizą praw rządzących zjawiskami przypadkowymi, czyli takimi, których wyniku nie da się przewidzieć. Do zdarzeń nieprzewidywalnych należy na przykład rzut monetą, czy wyciągnięcie karty z talii.

O dwóch doświadczeniach przebiegających w identycznych warunkach, mających te same zbiory kontrolowanych przyczyn, mówimy, że są **identyczne**. Doświadczenie, które można przeprowadzić dowolnie wiele razy, nazywamy **doświadczeniem powtarzalnym**.

Przykład 1

- Masa przedmiotu jest stała. Doświadczenie polegające na pomiarze masy danego przedmiotu jest doświadczeniem powtarzalnym.
- Pomiar czasu palenia się danej świecy jest zdarzeniem niepowtarzalnym, bo świeca ulegnie spaleniu po pierwszym doświadczeniu.

Zjawiska polegające na przeprowadzaniu dużej liczby tych samych doświadczeń, nazywamy **zjawiskami masowymi**.

W rachunku prawdopodobieństwa jednym z podstawowych pojęć jest doświadczenie losowe.

Doświadczenie losowe, to doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w identycznych (lub zbliżonych) warunkach i którego wyniku nie daje się jednoznacznie przewidzieć.

Wynik doświadczenia losowego będziemy nazywać **zdarzeniem losowym** (krótko: **zdarzeniem**).

Przykład 2

Przykłady zdarzeń losowych:

- wyciągnięcie asa z talii 52 kart,
- uzyskanie liczby oczek większej od 4 w rzucie kością do gry,
- wypadnięcie dwóch orłów w rzucie dwoma monetami.

Zbiór zdarzeń elementarnych

Pojedyncze (najprostsze) wyniki danego doświadczenia nazywać będziemy **zdarzeniami elementarnymi**.

Zdarzenie elementarne oznaczać będziemy zwykle literą omega: ω .

Na przykład w rzucie kostką zdarzenia elementarne to wszystkie możliwe liczby oczek, które mogą wypaść w jednym rzucie.

Ważne!

W rachunku prawdopodobieństwa zdarzenie elementarne jest pojęciem pierwotnym, czyli niedefiniowalnym.

Zdarzenia elementarne danego doświadczenia losowego mają następujące własności:

- dane zdarzenie może zajść lub nie,
- zajście jednego zdarzenia wyklucza zajście innego zdarzenia,
- jedno ze zdarzeń na pewno zajdzie.

Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego nazywamy zbiorem **zdarzeń elementarnych (przestrzeni zdarzeń elementarnych)**.

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać: Ω . Do naszych celów przyjmiemy, że zbiór ten jest zbiorem **skończonym**.

Liczbę elementów tego zbioru (moc zbioru), będziemy oznaczać jako $|\Omega|$.

Przykład 3

Doświadczenie polega na rzucie symetryczną kostką do gry.

Zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

gdzie:

- 1 – wypadnięcie jednego oczka,
- 2 – wypadnięcie dwóch oczek,
- 3 – wypadnięcie 3 oczek, itd.

Zatem: $|\Omega| = 6$.

Przykład 4

Z pudła, w którym znajduje się jedna kula biała, jedna kula zielona i jedna kula niebieska, losujemy jedną kulę.

Zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia:

$$\Omega = \{b, z, n\}$$

gdzie:

b – wylosowanie kuli białej,

z – wylosowanie kuli zielonej,

n – wylosowanie kuli niebieskiej.

Zatem: $|\Omega| = 3$.

Przykład 5

Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie monetą.

Zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia:

$$\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$$

gdzie:

(O, O) – wyrzucenie orła za pierwszym i drugim razem,

(O, R) – wyrzucenie za pierwszym razem orła, za drugim reszki,

(R, O) – wyrzucenie za pierwszym razem reszki, za drugim orła,

(R, R) – wyrzucenie reszki za pierwszym i drugim razem.

Zauważmy, że zbiór zdarzeń elementarnych ma postać par uporządkowanych.

Zatem $|\Omega| = 4$.

Zdarzenie losowe

Definicja: Zdarzenie losowe

Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem).

Zdarzenia losowe oznaczać będziemy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \dots$

Niech A oznacza zdarzenie: w rzucie symetryczną kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 4.

Powiemy, że **zachodzi zdarzenie** A , gdy wypadło 5 lub 6 oczek.

$$A = \{5, 6\}$$

Ponieważ $A \subset \Omega$, gdzie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zatem A jest podzbiorem zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω .

Elementy zbioru A nazywamy wynikami **sprzyjającymi** zdarzeniu A .

Przykład 6

W tym samym doświadczeniu losowym różne **zdarzenia losowe** mogą zawierać różne zbiory wyników. Na przykład w rzucie symetryczną kostką do gry.

$A = \{5\}$ – wypadła liczba oczek podzielna przez 5,

$B = \{1, 3, 5\}$ – wypadła nieparzysta liczba oczek,

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – wypadła liczba oczek mniejsza od 6.

Definicja: Zdarzenie pewne

Zdarzeniem pewnym A , gdzie $A \subset \Omega$, nazywamy zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, tworzące zbiór Ω .

Zauważmy, że jeśli **zdarzenie losowe** A jest zdarzeniem pewnym, to $A = \Omega$.

Definicja: Zdarzenie niemożliwe

Zdarzeniem niemożliwym A , gdzie $A \subset \Omega$, nazywamy zdarzenie losowe, któremu nie sprzyjają żadne zdarzenia elementarne, tworzące zbiór Ω .

Zauważmy, że jeśli zdarzenie losowe A jest zdarzeniem niemożliwym, to $A = \emptyset$.

Przykład 7

W rzucie symetryczną kostką do gry:

- zdarzenie pewne: wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 7,
- zdarzenie niemożliwe: wyrzucenie liczby oczek większej od 7.

Przykład 8

Ze zbioru $\{1, 3, 7\}$ losujemy dwie cyfry i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową.

- Zdarzenie pewne: utworzona liczba jest nieparzysta.
- Zdarzenie niemożliwe: utworzona liczba jest podzielna przez 5.

Słownik

zdarzenie losowe

każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, który pokazuje historię i współczesne znaczenie rachunku prawdopodobieństwa.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DsjmQs52D>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej podstawowych zagadnień rachunku prawdopodobieństwa.

Polecenie 2

W danej przestrzeni zdarzeń elementarnych istnieje tylko jedno zdarzenie pewne. Można je jednak opisać na różne sposoby. Rozważmy doświadczenie losowe: z pudła zawierającego kule ponumerowane 2, 4, 6, 8 losujemy jedną kulę. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia oraz zdarzenie pewne i opisz je na co najmniej dwa sposoby.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz zdarzenie, które **nie jest** zdarzeniem losowym.

- ☐ Wylosowanie króla z talii 52 kart do gry.
- ☐ Wybór jednej liczby ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4\}$.
- ☐ Pomiar prędkości wiatru 11 maja.
- ☐ Wylosowanie parzystej liczby oczek w rzucie symetryczną kostką do gry.

Ćwiczenie 2



Spośród cyfr $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy bez zwracania jedną cyfrę, którą uważamy za cyfrę jedności. Następnie z pozostałych cyfr losujemy jedną cyfrę, którą uważamy za cyfrę dziesiątek. Otrzymujemy w ten sposób liczbę dwucyfrową. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest równa:

- ☐ 8
- ☐ 16
- ☐ 4
- ☐ 12

Ćwiczenie 3



Połącz w pary – opis doświadczenia i zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.

Wyciągamy kulę z pudła zawierającego 3 ponumerowane kolejno kule białe i 2 ponumerowane kolejno kule zielone.

$$\Omega = \{(1,4), (1,6), (1,1), (4,6), (4,1), (4,6), (4,1), (6,4), (6,6), (6,1)\}$$

Z pudła zawierającego karteczki z zapisanymi liczbami 1, 4, 6 losujemy najpierw jedną karteczkę, zatrzymujemy ją, a następnie losujemy drugą karteczkę. Tworząc w ten sposób liczby dwucyfrowe.

$$\Omega = \{b_1, b_2, b_3, z_1, z_2\}$$

Z pudła zawierającego karteczki z zapisanymi liczbami 1, 4, 6 losujemy najpierw jedną karteczkę, wrzucamy ją z powrotem do pudła, a następnie losujemy drugą karteczkę. Tworząc w ten sposób liczby dwucyfrowe.

$$\Omega = \{(1,4), (1,6), (4,6), (4,1), (6,1)\}$$

Wyciągamy kolejno dwie kule (bez zwracania) z pudła zawierającego ponumerowane kolejno dwie kule białe i jedną zieloną.

$$\Omega = \{(b_1, b_2), (b_1, z), (b_2, b_1), (b_2, z), (z, b_1), (z, b_2)\}$$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zapisy, wpisując liczby określające ilość zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego.

1. Rzut trzema monetami: $|\Omega| =$.

2. Rzut trzema symetrycznymi kostkami do gry: $|\Omega| =$.

3. Tworzenie ze zbioru cyfr 1, 3, 7, 9 liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach: $|\Omega| =$.

4. Tworzenie liczb pięciocyfrowych z cyfr: 0, 6, 7, 8, 9, przestawiając te cyfry w dowolny sposób: $|\Omega| =$.

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Jeśli $A = \Omega$, to zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

☐ Elementy zdarzenia A nazywamy wynikami sprzyjającymi zdarzeniu A .

☐ Zdarzenie elementarne to inna nazwa zdarzenia losowego.

☐ Zdarzenie niemożliwe A , gdzie $A \subset \Omega$, to zdarzenie losowe, któremu sprzyjają tylko niektóre zdarzenia elementarne, tworzące zbiór Ω .

Ćwiczenie 6



Ścianki czworościanu foremnego ponumerowane są odpowiednio: 1, 2, 3, 5. Rzucamy dwukrotnie czworościanem i odczytujemy za każdym razem liczbę zapisaną na ścianie, na którą upadł czworościan.

Połącz w pary opis zdarzenia i sprzyjające mu zdarzenia elementarne.

Iloczyn uzyskanych liczb jest większy od 20.

$$A = \{(5, 5)\}$$

Wartość bezwzględna różnicy uzyskanych liczb jest równa 1.

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\}$$

Iloczyn uzyskanych liczb jest liczbą pierwszą.

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

Suma uzyskanych liczb jest sześcianem liczby naturalnej.

$$A = \{(3, 5), (5, 3)\}$$

Ćwiczenie 7



Trzej strzelcy strzelają do jednego celu. Strzał celu oznaczamy liczbą 1, a niecelny liczbą 0.

Zdarzeniem elementarnym jest trójwyrazowy ciąg strzałów oddanych przez strzelców. Zapisz zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu T – cel został co najmniej raz trafiony.

Ćwiczenie 8



Zbiór zdarzeń elementarnych dla pewnego doświadczenia opisany jest następująco:

$$\Omega = \{(m, n) : m \in \{1, 5\}, n \in \{M, K, L\}\}$$

Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne należące do tego zbioru.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa III lub IV

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje przykłady doświadczeń losowych
- określa zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego
- rozpoznaje zdarzenia pewne oraz zdarzenia niemożliwe
- określa zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mini – inscenizacja
- plakat zależności

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie wspólnie oglądają film edukacyjny, będący wprowadzeniem do rachunku prawdopodobieństwa.
Zastanawiają się przy tym, dlaczego probabilistyka jest jedną z najdynamiczniej rozwijających się gałęzi matematyki.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Grupa uczniów prezentuje mini – inscenizację , którą przygotowała w domu, przybliżającą podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa, związane ze zdarzeniami losowymi.
2. Uczniowie w grupach zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” i sporządzają plakaty, prezentujące zależności między poznanymi pojęciami. Te plakaty powinny być umieszczone w klasie i być dostępne dla uczniów w ciągu całego czasu poświęconego na zgłębianie tajemnic rachunku prawdopodobieństwa.

Faza podsumowująca:

1. Przedstawiciele grup prezentują wykonane przez grupy plakaty, liderzy przedstawiają swoje spostrzeżenia na temat pracy grup.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i „aktorów”.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny, będący wstępem do rachunku prawdopodobieństwa można zaprezentować uczniom dopiero w temacie Pojęcie prawdopodobieństwa.