



Określanie nierówności z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Określanie nierówności z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Zazwyczaj rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną polega na znalezieniu zbioru rozwiązań tej nierówności. Teraz będzie odwrotnie.

W tym materiale będziesz rozwiązywać zadanie „od końca”. Twoim zadaniem będzie określanie, czyli wyznaczanie nierówności z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań.

Twoje cele

- Wyznaczysz nierówność z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Ważne!

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy:

$|x - a| \leq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r \leq x \leq a + r$

$|x - a| \geq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

Przykład 1

Wyznamy przykład nierówności z wartością bezwzględną, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-3, 11)$.

Przy rozwiązywaniu zadania skorzystamy z zależności:

- dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ zachodzi warunek:

$|x - a| < r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r < x < a + r$

Wiemy z treści zadania, że $-3 < x < 11$.

Zatem zgodnie z powyższym warunkiem możemy zapisać układ równań:

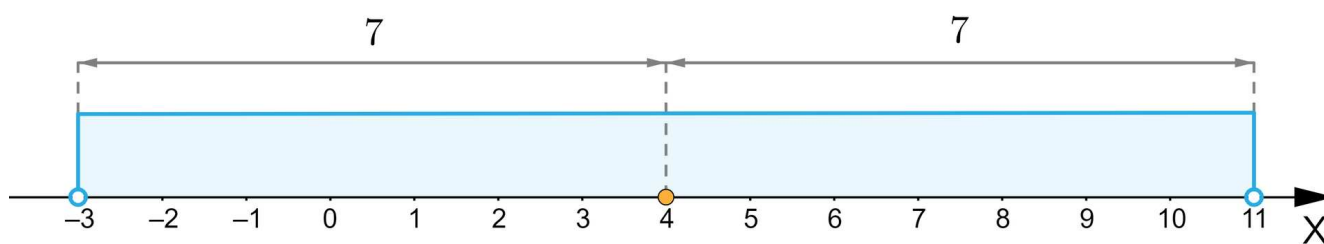
$$\begin{cases} a - r = -3 \\ a + r = 11 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami równań otrzymamy $2a = 8$ czyli $a = 4$.

Po odjęciu stronami równań otrzymamy $-2r = -14$ czyli $r = 7$.

Zatem szukana nierówność z wartością bezwzględną to: $|x - 4| < 7$.

Rozważając interpretację geometryczną nierówności, której rozwiązaniem jest przedział $(-3, 11)$, możemy dany przedział zinterpretować jako zbiór punktów na osi liczbowej, których odległość od środka odcinka o początku w punkcie -3 i końcu w punkcie 11 jest mniejsza od połowy długości tego odcinka. Środek odcinka znajduje się w punkcie o współrzędnej 4 , natomiast połowa długości tego odcinka jest równa 7 .



Zatem nierówność to $|x - 4| < 7$.

Przykład 2

Wyznamy przykład nierówności z wartością bezwzględną, której **zbiorem rozwiązań nierówności** jest zbiór $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

Przy rozwiązaniu zadania skorzystamy z zależności:

- dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ zachodzi warunek:

$|x - a| > r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < a - r$ lub $x > a + r$.

Wiemy, że $x < -5$ lub $x > 1$.

Zatem zgodnie z powyższym warunkiem możemy zapisać układ równań:

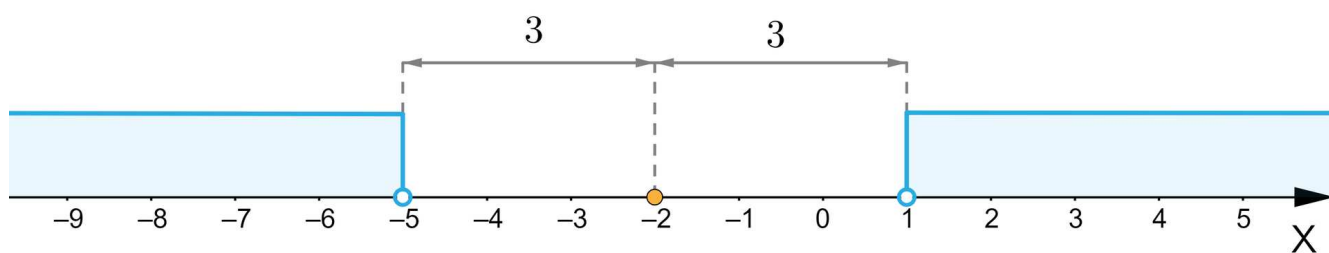
$$\begin{cases} a - r = -5 \\ a + r = 1 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami równań otrzymamy $2a = -4$ czyli $a = -2$.

Po odjęciu stronami równań otrzymamy $-2r = -6$ czyli $r = 3$.

Zatem szukana nierówność z wartością bezwzględną to: $|x + 2| > 3$.

Rozważając interpretację geometryczną nierówności, której rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ możemy ją zinterpretować jako zbiór punktów na osi liczbowej, których odległość od środka odcinka o początku w punkcie -5 i końcu w punkcie 1 jest większa od połowy długości tego odcinka. Środek odcinka znajduje się w punkcie o współrzędnej -2 , natomiast połowa długości tego odcinka jest równa 3 .



Zatem nierówność to $|x + 2| > 3$.

Przykład 3

Dany jest zbiór $X = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq b\}$. Wyznaczmy takie liczby a i b , dla których:

- a. $X = \emptyset$,
- b. $X = \{2\}$.

Rozwiązanie

- a. Ponieważ wartość bezwzględna nigdy nie jest liczbą mniejszą od 0, nierówność $|x - a| \leq b$ nie będzie miała rozwiązań dla $b < 0$. Liczba a może być dowolna, czyli $a \in \mathbb{R}$ i $b < 0$.
- b. Aby rozwiązaniem była liczba 2, nierówność ma postać $|x - 2| \leq 0$.
Zatem $a = 2$ i $b = 0$.

Słownik

zbiór rozwiązań nierówności

zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem pokazującym sposoby wyznaczania nierówności z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvmgmdAS8>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej nierówności z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Jaką nierówność z użyciem symbolu wartości bezwzględnej spełniają elementy x należące do zbioru $(-2, 8)$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zapisz z użyciem symbolu wartości bezwzględnej, jaki warunek spełniają elementy ze zbioru $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $|x - 2| > 5$

☐ $|x + 2| > 5$

☐ $|x + 2| > 3$

☐ $|x + 2| < 5$

Ćwiczenie 2



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Przedział $(-2, 4)$ jest rozwiązaniem nierówności:

☐ $|x - 1| < 3$

☐ $|x + 1| > 3$

☐ $|x - 1| > 3$

☐ $|x + 1| < 3$

Ćwiczenie 3



Dany jest zbiór $(0, 10)$, który jest rozwiązaniem nierówności $|x - a| < b$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ a i b przyjmują taką samą wartość.

☐ Liczba b jest liczbą niewymierną.

☐ Zachodzi równość $|a| = |b|$.

☐ a i b są liczbami przeciwnymi.

☐ Suma $a + b$ jest równa 10.

☐ Suma $a + b$ należy do przedziału $(-2, 20)$.

Ćwiczenie 4



Zapisz nierówność, której rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{5}{6}, \infty)$. Przeciągnij odpowiednie liczby w puste pola.

$$|x - \boxed{}| > \boxed{}$$

$\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij nierówność tak, aby jej zbiorem rozwiązań była suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$. Przeciągnij odpowiedni znak w puste pola.

$$|x - 1| \boxed{} 2$$

$\leq$

$\geq$

$<$

$>$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary zbiór rozwiązań nierówności z odpowiednią nierównością.

$$(-\infty, -10) \cup (-6, \infty)$$

$$|4 + 8x| > 4$$

$$(-2, 6)$$

$$|6 + 2x| < 6$$

$$(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

$$|1 - 2x| > 5$$

$$(-6, 0)$$

$$|2 - x| < 4$$

$$(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

$$|x + 8| > 2$$

Ćwiczenie 7



Wybierz wszystkie przykłady nierówności z wartością bezwzględną, aby jej rozwiązaniem był zbiór pusty. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ $4 \cdot |x + 2| + 1 < 0$

☐ $-5 \cdot |x + 2| - 5 > 0$

☐ $-5 \cdot |x + 2| > 0$

☐ $-5 \cdot |x + 2| - 2 < 0$

☐ $|x + 2| < 0$

☐ $-2 \cdot |x + 2| < 0$

☐ $|x + 2| - 3 < 0$

Ćwiczenie 8



Dany jest zbiór $X = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| > b\}$. Określ liczby a i b jeżeli wiadomo, że:

a. $X = \mathbb{R}$,

b. $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie nierówności z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 \cdot |x + 3| + 3 \cdot |x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2 \cdot |x - 3| < 11$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza nierówność z wartością bezwzględną na podstawie znanego jej zbioru rozwiązań
- doskonali umiejętności rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady przedziałów typu (a, b) . Pozostali uczniowie podają nierówności z wartością bezwzględną, których rozwiązaniem jest dany przedział. Wybrani uczniowie komentują odpowiedzi kolegów i koleżanek.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie w parach analizują przykłady z samouczka.
3. Nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązania przykładów, wyjaśnia wątpliwości i odpowiada na pytania.
4. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2.
5. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania polecenia 2.
6. Uczniowie w grupach 4 osobowych uczestniczą w konkursie zadaniowym, polegającym na rozwiązaniu na czas ćwiczeń interaktywnych 1 – 6. Najszybsza grupa, która poprawnie rozwiązała wszystkie zadania wygrywa konkurs i jest nagrodzona przez nauczyciela oceną bardzo dobrą.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jaki napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Nierówności stopnia pierwszego](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania własnej prezentacji multimedialnej.