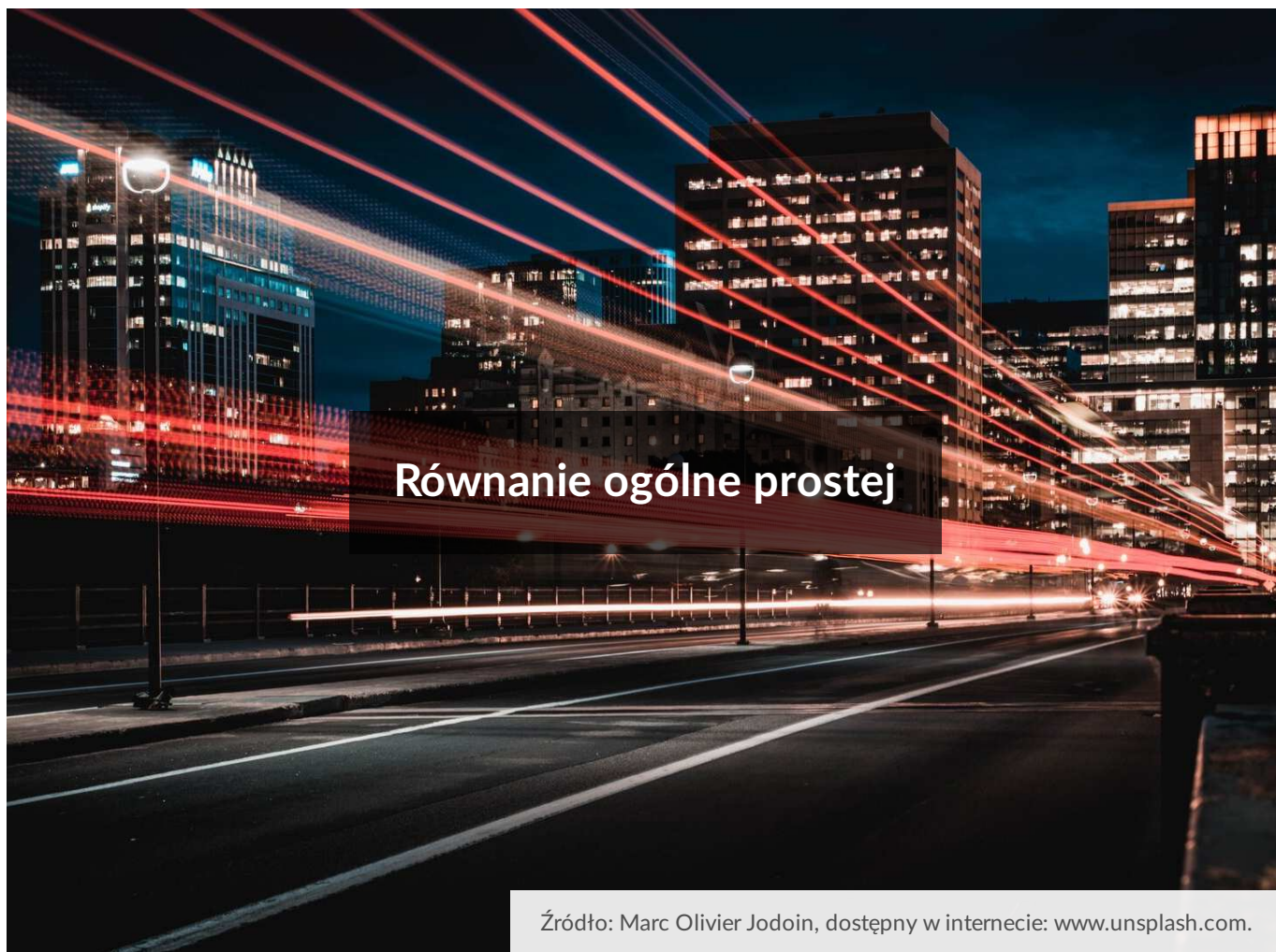




Równanie ogólne prostej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie ogólne prostej

Źródło: Marc Olivier Jodoin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Równanie kierunkowe prostej jest przydatne w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej. Pomimo wielu zalet (m.in. bardzo praktycznej interpretacji współczynników, która pozwala błyskawicznie przechodzić od równania do wykresu i z powrotem) ma jedną zasadniczą wadę: nie można nim opisać prostych, które nie są wykresami funkcji liniowej, czyli prostych równoległych do osi Y . Dlatego właśnie potrzebujemy innego rodzaju równania – takiego, które obejmie wszystkie proste narysowane w prostokątnym układzie współrzędnych.

Twoje cele

- Rozpoznaś prostą opisaną równaniem ogólnym.
- Przekształcisz równanie kierunkowe prostej na równanie ogólne.
- Przekształcisz równanie ogólne prostej na równanie kierunkowe.
- Odczytasz z równania ogólnego prostej współrzędne jej wektora normalnego.

Przeczytaj

Równaniem kierunkowym

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

można opisać każdą prostą, która nie jest równoległa do osi Y . Proste równoległe do osi Y opisuje się równaniami postaci

$$x = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

W geometrii analitycznej często używa się tzw. **równania ogólnego**, które obejmuje każdą prostą narysowaną w układzie współrzędnych. Ma ono postać

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$, $(A, B) \neq (0, 0)$.

Warunek $(A, B) \neq (0, 0)$ oznacza, że współczynniki A i B nie są równocześnie równe zeru. Czasami zapisuje się ten fakt inaczej:

$$A^2 + B^2 > 0 \text{ albo } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Zauważmy, że warunek ten jest niezbędny, aby równanie opisywało prostą. Gdyby bowiem A i B były jednocześnie równe zeru, równanie $Ax + By + C = 0$ opisywałoby:

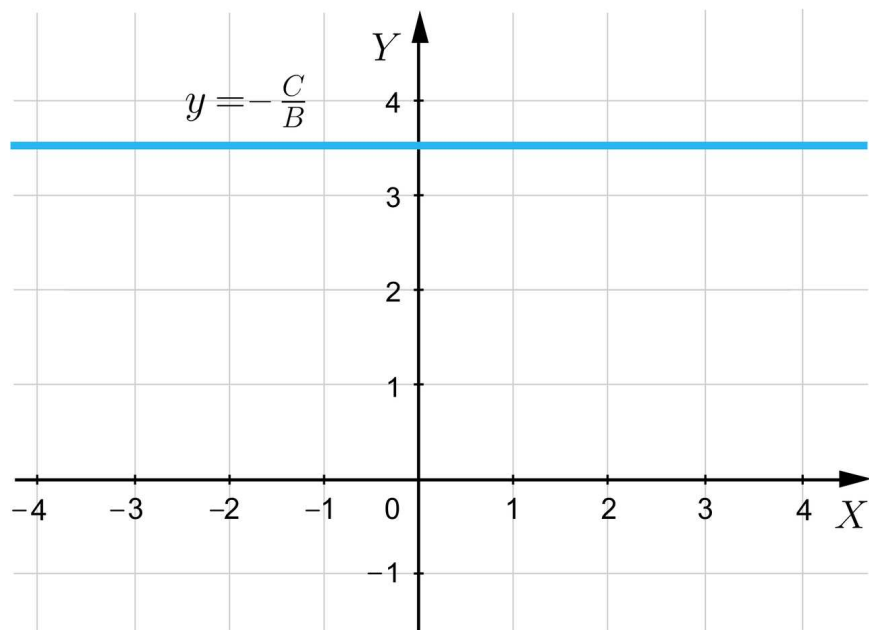
- zbiór pusty, gdy $C \neq 0$ albo
- całą płaszczyznę, gdy $C = 0$.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje:

a)

prostą równoległą do osi X , gdy $A = 0$ i $B \neq 0$, równanie tej prostej to

$$y = -\frac{C}{B}.$$



b)

c)

Przykład 1

Aby narysować prostą o danym równaniu ogólnym

$$3x - 2y + 6 = 0,$$

wystarczy wyznaczyć współrzędne punktów przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych. Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią X są postaci $(x_0, 0)$, zatem możemy do równania prostej podstawić

$$x = x_0, y = 0.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$3x_0 - 2 \cdot 0 + 6 = 0$$

$$3x_0 = -6$$

$$x_0 = -2$$

Zatem punkt przecięcia z osią X ma współrzędne $(-2, 0)$.

Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią Y są postaci $(0, y_0)$, zatem możemy do równania prostej podstawić

$$x = 0, y = y_0.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$3 \cdot 0 - 2y_0 + 6 = 0$$

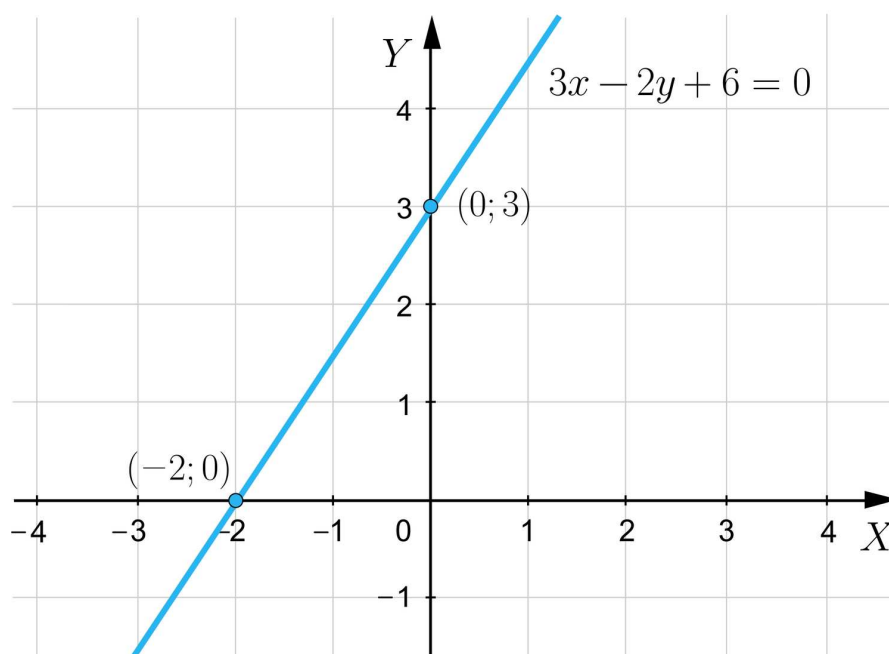
$$-2y_0 = -6$$

$$y_0 = 3.$$

Zatem punkt przecięcia z osią X ma współrzędne $(0, 3)$.

Wystarczy zatem poprowadzić prostą przez punkty $(-2, 0)$ i $(0, 3)$, aby otrzymać [wykres równania](#)

$$3x - 2y + 6 = 0$$



Przykład 2

[Równania kierunkowe prostej](#) zapiszemy w postaci ogólnej.

Równanie kierunkowe prostej	Równanie ogólne prostej
$y = ax + b$	$ax - y + b = 0$
$y = -3x + \sqrt{2}$ dla $a = -3, b = \sqrt{2}$	$-3x - y + \sqrt{2} = 0$ dla $A = -3, B = -1, C = \sqrt{2}$
$y = \pi x$ dla $a = \pi, b = 0$	$\pi x - y = 0$ dla $A = \pi, B = -1, C = 0$
$y = -2,5$ $a = 0, b = -2,5$	$y + 2,5 = 0$ dla $A = 0, B = 1, C = 2,5$

Równanie kierunkowe prostej	Równanie ogólne prostej
$y = 0$ dla $a = 0, b = 0$	$y = 0$ dla $A = 0, B = 1, C = 0$

Aby równanie kierunkowe przekształcić do ogólnego, wystarczy przenieść wszystkie składniki na jedną stronę równania i uporządkować je tak, aby najpierw wystąpił składnik ze zmienną x , później składnik ze zmienną y , a na końcu wyraz wolny. Zwróćmy przy okazji uwagę, że jeśli prosta opisana jest równaniem kierunkowym, to jest ono tylko jedno. Natomiast każda prosta ma nieskończenie wiele równoważnych równań ogólnych.

Przykład 3

Do każdego z równań dopiszemy równania równoważne opisujące tę samą prostą.

Równanie I	Równanie II	Równanie III	Równanie IV
$3x - 4y + 1 = 0$	$-3x + 4y - 1 = 0$	$6x - 8y + 2 = 0$	$\frac{3}{2}x - 2y + \frac{1}{2} = 0$
$-5x + 7y = 0$	$5x - 7y = 0$	$\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}y = 0$	$15x - 21y = 0$
$2x - 3 = 0$	$-10x + 15 = 0$	$x - \frac{3}{2} = 0$	$\frac{2}{3}x - 1 = 0$
$y = 0$	$2y = 0$	$-3y = 0$	$0,73y = 0$

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Y , czyli współczynnik B w równaniu $Ax + By + C = 0$ jest różny od zera, to równanie ogólne można przekształcić do kierunkowego, wyznaczając zmienną y w zależności od zmiennej x .

Przykład 4

Przekształcimy **równanie ogólne prostej** na jej równanie kierunkowe.

$$2x - 3y + 7 = 0$$

Od obu stron równania odejmujemy $2x$ i 7 , otrzymując

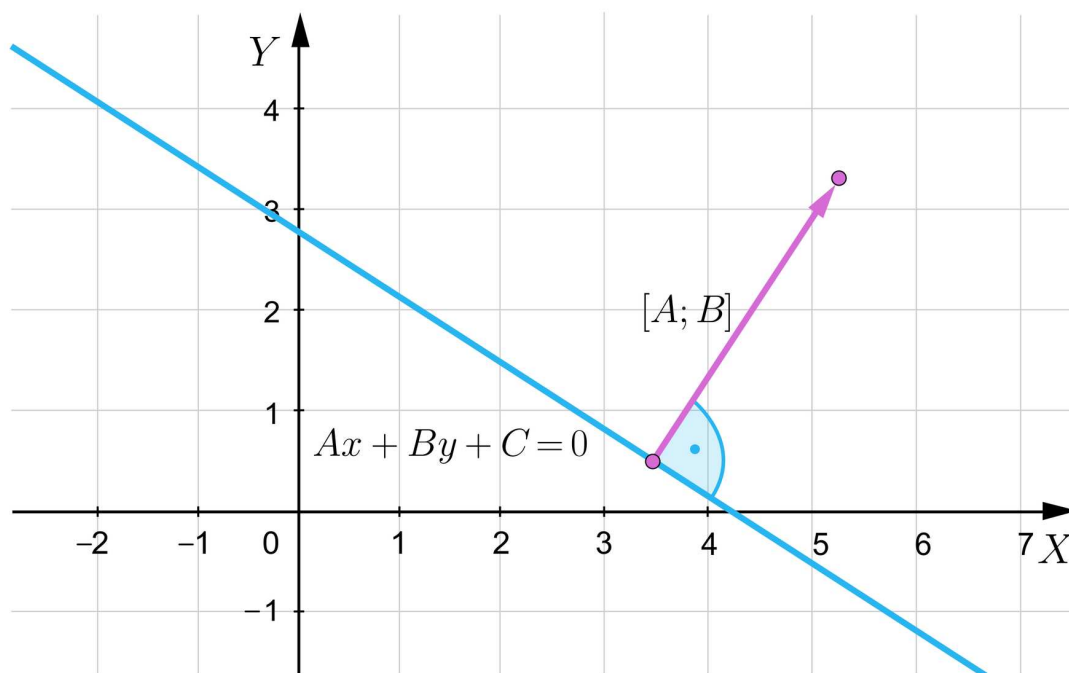
$$-3y = -2x - 7$$

Obie strony równania dzielimy przez (-3) , otrzymując

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

Wprowadzimy jeszcze jedno użyteczne pojęcie związane z prostą. Mianowicie do każdej prostej możemy narysować nieskończenie wiele wektorów prostopadłych - każdy z nich nazywamy **wektorem normalnym prostej**.

Wykorzystując **iloczyn skalarny wektorów**, można udowodnić, że współrzędne jednego z wektorów normalnych prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ są równe $[A, B]$.



Przykład 5

Do podanych prostych podamy współrzędne przykładowych wektorów normalnych.

Równanie kierunkowe	Przykładowe równania ogólne	Współrzędne przykładowych wektorów normalnych
$y = 5$	$y - 5 = 0$ $2y - 10 = 0$	$[0, 1]$ $[0, 2]$
$y = 3x$	$3x - y = 0$ $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$	$[3, -1]$ $[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$
$y = -2x - 1$	$2x + y + 1 = 0$ $-6x - 3y - 3 = 0$	$[2, 1]$ $[-6, -3]$
brak	$x - 3 = 0$ $10x - 30 = 0$	$[1, 0]$ $[10, 0]$

Słownik

równanie ogólne prostej

równanie postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie współczynniki A i B nie są jednocześnie równe zero; równaniem takiej postaci można opisać dowolną prostą narysowaną w układzie współrzędnych

równanie kierunkowe prostej

równanie postaci $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$; równaniem takiej postaci można opisać dowolną prostą narysowaną w układzie współrzędnych, która nie jest równoległa do osi

wykres równania

zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają dane równanie

wektor normalny prostej

każdy wektor prostopadły do danej prostej

iloczyn skalarny wektorów

wektory: $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$, liczba oznaczana jako $\vec{u} \circ \vec{v}$ (gdzie znak $\circ$ oznacza mnożenie skalarne w odróżnieniu od zwykłego mnożenia), którą można wyznaczyć na dwa sposoby:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

albo inaczej

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha,$$

gdzie α to miara kąta pomiędzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Jeden z tych wzorów przyjmujemy jako definicję, zaś drugiego dowodzimy jako twierdzenie

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym filmem samouczkiem. Wykonaj polecenie znajdujące się poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dc7nfggnw>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równania ogólnego prostej.

Polecenie 2

Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie pojęcia.

1. Każda prosta ma nieskończenie wiele równań .
2. Każda prosta, która nie jest równoległa do osi Y ma dokładnie jedno równanie .
3. Wektor normalny prostej to wektor do niej .
4. Współrzędne wektora normalnego można odczytać z równania ogólnego prostej:
pierwsza współrzędna wektora normalnego jest równa przy zmiennej x ,
zaś druga jest równa przy y .
5. Jeśli współczynnik przy zmiennej x jest równy zeru, przy czym współczynnik przy zmiennej y nie jest zerem, to prosta opisana przez to równanie jest do osi Y .
6. Jeśli współczynnik przy zmiennej y jest równy zeru, przy czym współczynnik przy zmiennej x nie jest zerem, to prosta opisana przez to równanie jest do osi X .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Do każdego równania kierunkowego dopasuj wszystkie równania ogólne, które opisują tę samą prostą. Przeciągnij i upuść.

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$-2x + 3y + 6 = 0$$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$6x - 4y - 12 = 0$$

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$-4x + 6y + 12 = 0$$

$$-4x + 6y - 12 = 0$$

$$-6x + 4y - 12 = 0$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

Ćwiczenie 4



Do każdego równania przyporządkuj współrzędne wektorów normalnych prostych będących wykresami tych równań.

$$3x - 4y = 0$$

[1, 0]

[0, 20]

[-100, 0]

[0, -100]

[0, 1]

[3, -4]

[20, 0]

[-3, 4]

[3, 15]

[-6, 8]

[1, 5]

[-1, -5]

$$x + 5y + 10 = 0$$

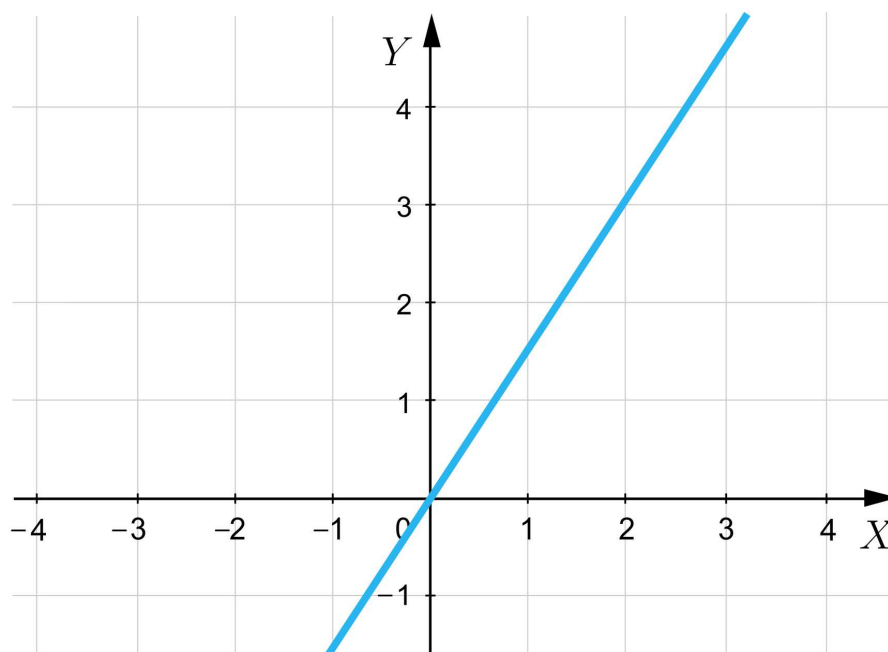
$$x + 8 = 0$$

$$y - 6 = 0$$

Ćwiczenie 5



Wskaż wszystkie równania, których wykresem jest narysowana prosta.

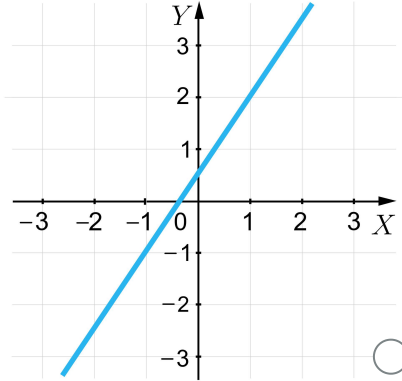
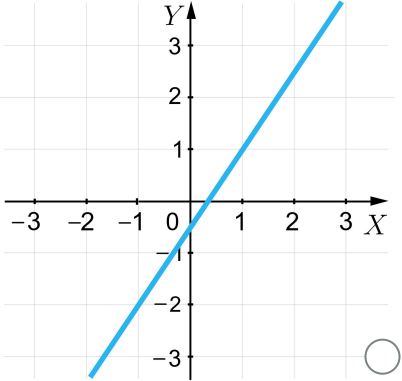


☐ $3x - 2y = 0$

☐ $4x - 6y = 0$

☐ $y = \frac{2}{3}x$

☐ $2x - 3y = 0$

$$3x - 2y + 1 = 0$$
[illegible]

Ćwiczenie 8



W powyższym ćwiczeniu przeanalizuj współczynniki przy zmiennych x i y w poszczególnych parach prostych równoległych. Poszukaj zależności między nimi. Ułóż poniższą rozsypankę w taki sposób, aby otrzymać zdania prawdziwe.

że istnieje taka liczba $k \neq 0$,



opisane równaniami ogólnymi



są proporcjonalne.



Algebraicznie oznacza to,



dla której



$$A = k \cdot D \text{ i } B = k \cdot E.$$



$$Ax + By + C = 0 \text{ i } Dx + Ey + F = 0$$



Dwie proste



wtedy i tylko wtedy, gdy



ich odpowiednie współczynniki



przy zmiennych x i y



są równoległe



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie ogólne prostej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz prostą opisaną równaniem ogólnym.
- Przekształcisz równanie kierunkowe prostej na równanie ogólne.
- Przekształcisz równanie ogólne prostej na równanie kierunkowe.
- Odczytasz z równania ogólnego prostej współrzędne jej wektora normalnego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Równanie ogólne prostej” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Równanie ogólne prostej”).

Materiały pomocnicze:

- Współczynnik kierunkowy prostej zapisanej w postaci ogólnej
- Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie ogólne prostej”.