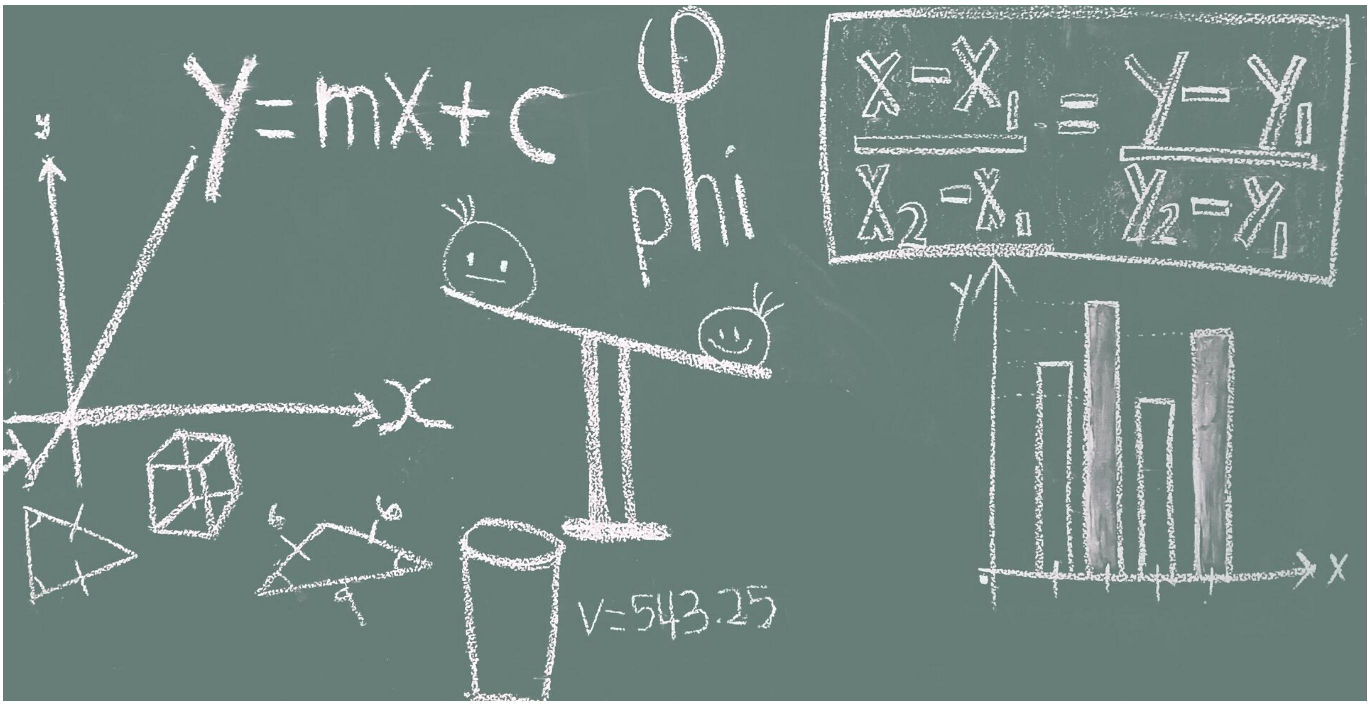


Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Źródło: Joanna Kosinska, dostępny w internecie: unsplash.com.

Jedno z największych oceanariów na świecie znajduje się w Singapurze. Zbiorniki wodne które się w nim znajdują mieszczą łącznie około 45000000 litrów wody, a żyje w nich ponad 100000 przedstawicieli 800 różnych gatunków organizmów morskich. W tym materiale nauczymy się jak obliczać objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Marine Life Park, Singapur

Źródło: Smuconlaw, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

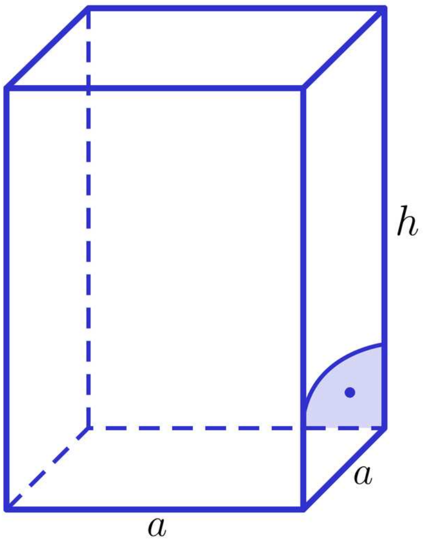
- Opiszesz podstawowe własności graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Wykorzystasz podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do obliczeń.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Obliczysz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Wyznaczysz wskazane odcinki w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym mając daną jego objętość.

Przeczytaj

Definicja: Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa iloczynowi pola podstawy przez wysokość

$$V = a^2 \cdot h.$$



Definicja: Objętość sześcianu

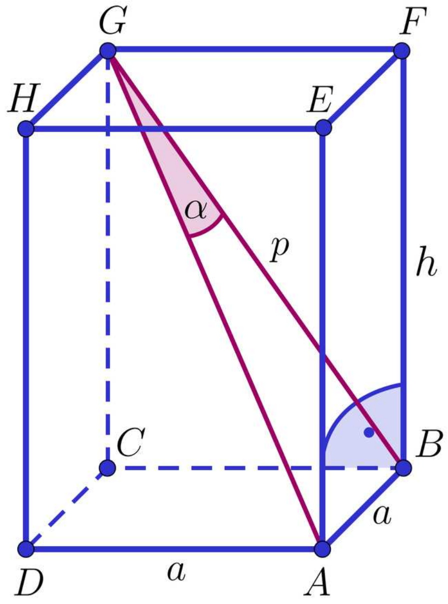
Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = a^3.$$

Przykład 1

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa a, zaś przekątna tworzy ze ścianą boczną kąt α. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie



Niech h oznacza długość wysokości rozważanego graniastosłupa, p będzie długością przekątnej ściany bocznej. Wówczas trójkąt ABG jest prostokątny. Stosując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy: $h^2 = p^2 - a^2$. Następnie z trójkąta GBA mamy $p = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$,

więc $h^2 = a^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 1\right) = \frac{a^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2 \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Możemy już obliczyć objętość naszego graniastosłupa:

$V = a^2 h = \frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}, 0 < \alpha < 45^\circ$.

Przykład 2

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe P, a pole ściany bocznej S. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

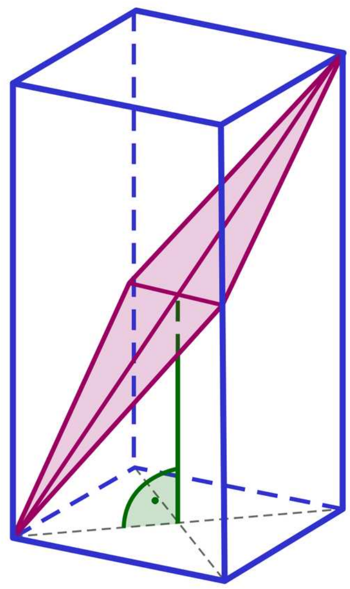
Rozwiązanie

Niech a oznacza długość krawędzi, h długość wysokości rozważanego graniastosłupa. Zatem $a = \sqrt{P}$ oraz $S = ah = \sqrt{P}h$, stąd $h = \frac{S}{\sqrt{P}}$. Możemy obliczyć objętość naszego graniastosłupa

$V = a^2 h = P \cdot \frac{S}{\sqrt{P}} = S\sqrt{P}$.

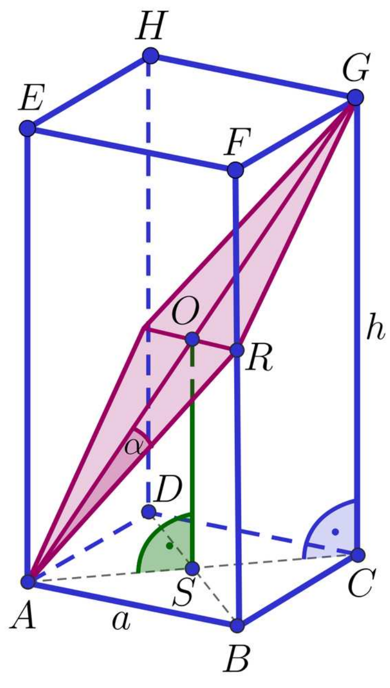
Przykład 3

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości a, przecięto płaszczyzną tak jak pokazano na rysunku.



Przekrojem jest romb o kącie ostrym, którego tangens jest równy $\sqrt{3}$. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:



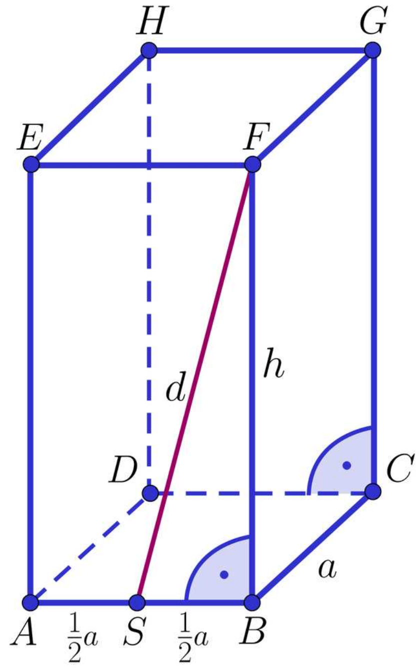
Aby obliczyć objętość graniastosłupa, musimy znaleźć zależność pomiędzy jego krawędzią podstawy a wysokością. Z treści zadania wiemy, że $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$, stąd wynika, że $\alpha = 30^\circ$. Następnie dla trójkąta AOR (który jest prostokątny, bo przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym) mamy $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|OR|}{|AO|}$ oraz biorąc pod uwagę, że $|OR| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ otrzymujemy $|AO| = \frac{\sqrt{6}a}{2}$. Niech β będzie kątem nachylenia przekroju do płaszczyzny podstawy. Z trójkąta ASO mamy $\cos\beta = \frac{|AS|}{|AO|}$ oraz biorąc pod uwagę, że $|AS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $|AO| = \frac{\sqrt{6}a}{2}$ otrzymujemy, że $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2} = \frac{h}{a\sqrt{2}}$. Zatem $h = 2a$. Objętość graniastosłupa jest równa $V = a^2h = 2a^3$.

Przykład 4

Odcinek długości d łączy środek krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego z wierzchołkiem drugiej podstawy leżącym w tej samej płaszczyźnie ściany bocznej graniastosłupa. Pole boczne tego graniastosłupa jest równe $4d^2$. Wyznaczymy objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Rozważmy graniastosłup prawidłowy czworokątny przedstawiony na rysunku.



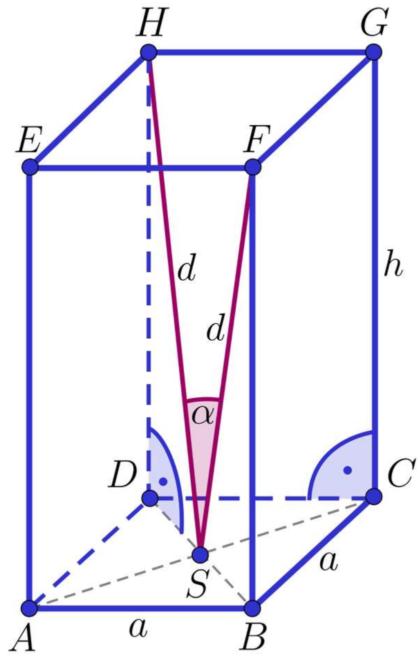
Z treści zadania wiemy, że pole boczne graniastosłupa jest równe $4d^2$, zatem mamy $4ah = 4d^2$, a stąd otrzymujemy, że $d^2 = ah$. Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SBF otrzymujemy $d^2 = \frac{1}{4}a^2 + h^2$. Podstawiając $d^2 = ah$ otrzymujemy $ah = \frac{1}{4}a^2 + h^2$. Przekształcając to równanie otrzymujemy $a^2 - 4ah + 4h^2 = 0$. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, nasze równanie przyjmuje postać $(a-2h)^2 = 0$. Łatwo zauważyć, że równość ta zachodzi tylko wtedy gdy $a = 2h$. Zatem otrzymujemy $d^2 = 2h^2$, z czego wynika, że $d = \sqrt{2}h$, czyli $h = \frac{\sqrt{2}}{2}d$ oraz $a = \sqrt{2}d$. Możemy obliczyć szukaną objętość: $V = 2d^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d = \sqrt{2}d^3$.

Przykład 5

Z punktu przecięcia przekątnych podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego poprowadzono odcinki o długości d do dwóch wierzchołków drugiej podstawy, przy czym wierzchołki te nie należą do tej samej płaszczyzny ściany bocznej. Kosinus kąta między nimi jest równy $\frac{1}{4}$. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Rozważmy graniastosłup prawidłowy czworokątny przedstawiony na rysunku.



Niech a oznacza długość krawędzi podstawy, a h długość wysokości rozważanego graniastosłupa. Korzystając z twierdzenia kosinusów dla trójkąta HSF otrzymujemy $2a^2 = 2d^2 - 2d^2 \cdot \frac{1}{4} = 2d^2 - \frac{1}{2}d^2 = \frac{3}{2}d^2$, stąd $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta HDS mamy $h^2 + \frac{1}{2}a^2 = d^2$. Podstawiając za $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$ otrzymujemy $h^2 = \frac{5}{8}d^2$, czyli $h = \frac{\sqrt{10}}{4}d$. Możemy obliczyć szukaną objętość: $V = \frac{3}{4}d^2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}d = \frac{3\sqrt{10}}{16}d^3$.

Słownik

graniastosłup prawidłowy czworokątny

graniastosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat
sześcian

prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe
twierdzenie Pitagorasa

w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta
twierdzenie kosinusów

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie spróbuj rozwiązać zadania zamieszczone pod nią.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D11clnErI

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej objętości graniastosłupa.

Polecenie 2

Przez przekątną dolnej podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego i jeden z wierzchołków górnej podstawy poprowadzono płaszczyznę. Przekrój jest trójkątem równoramiennym o ramionach równych p oraz kącie między nimi równym α. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Polecenie 3

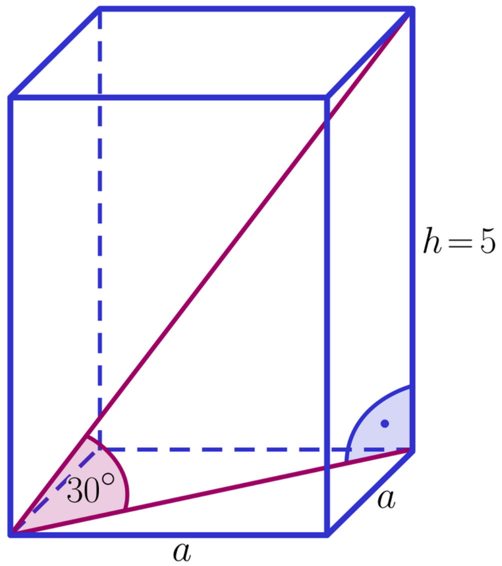
Przez przekątną dolnej podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego i punkt dzielący krawędź boczną w stosunku $1:2$ (licząc od dolnej podstawy) poprowadzono płaszczyznę. Przekrój jest trójkątem równoramiennym o ramionach równych p oraz kącie między nimi równym α. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

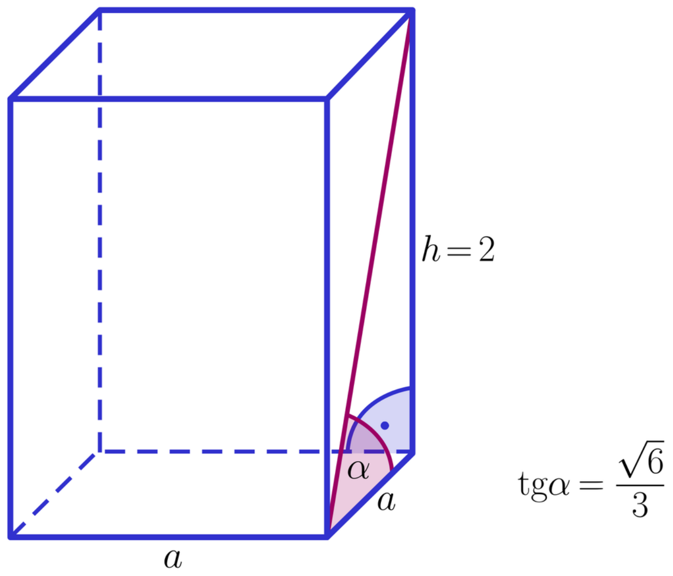
Na rysunku poniżej przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny.



`

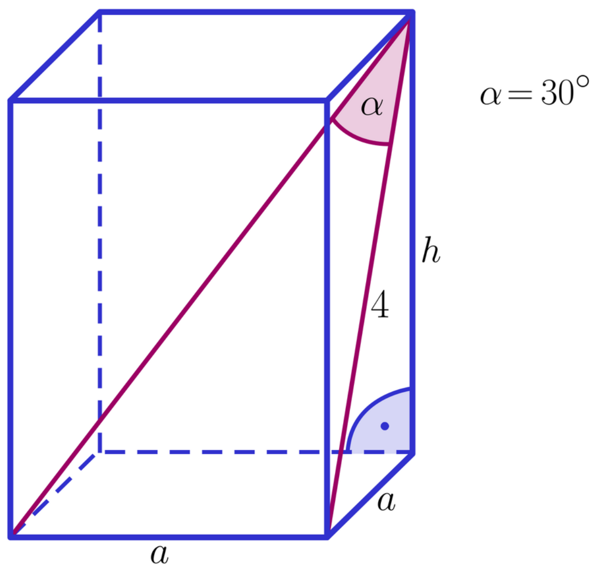
Ćwiczenie 2

Na rysunku poniżej przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny.



Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny.

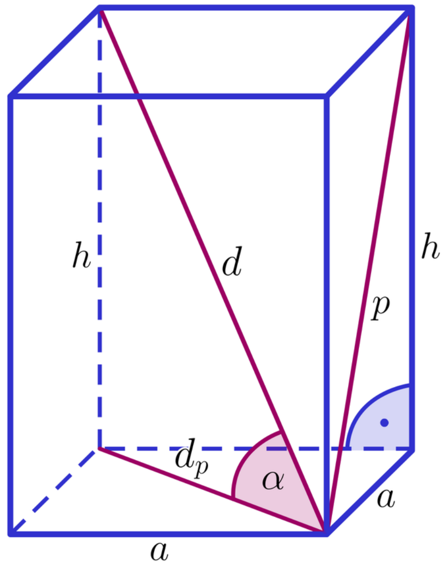


Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wprowadzono oznaczenia tak jak na rysunku. Przyporządkuj właściwe wzory.



Ćwiczenie 7

Wybierz prawidłową odpowiedź.

Ćwiczenie 8

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 16. Objętość tego graniastosłupa wynosi 2. Jakie wymiary ma ten graniastosłup?

Ćwiczenie 9

Przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przecinają się pod kątem 60°. Do budowy szkieletu tego graniastosłupa zużyto drut długości $32\ \mathrm{dm}$. Czy do akwarium o tych samych wymiarach zmieści się w 20 litrów wody?

Ćwiczenie 10

Do naczynia z sokiem w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 3, wrzucono trzy sześcienne kostki lodu o krawędzi pięć razy mniejszej niż krawędź podstawy naczynia. Objętość mieszaniny soku i lodu wynosiła wówczas 78. Ile wynosiła objętość soku przed wrzuceniem kostek lodu?

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje podstawowe własności graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,

- wykorzystuje podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do obliczeń,
- stosuje funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym
- oblicza objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego
- mając daną objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wyznacza wskazane odcinki w graniastosłupie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczacymi graniastosłupa parwidłowego czworokątnego.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji: “Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z działu „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Animacja 3D”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1‑2 z sekcji „Animacja 3D”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1‑2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3‑5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6‑7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Graniastosłupy prawidłowe

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu wiadomości o graniastosłupach lub przy omawianiu tematów dotyczących przekrojów graniastosłupów.