



Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Test samosprawdzający
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Na pewno wiesz, że to francuski matematyk i astronom François Viète (1540-1603) jako pierwszy wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych i współczynników. Ale czy wiesz, że to Viète podczas wojny francusko – hiszpańskiej, posługując się wyrażeniami algebraicznymi, znalazł klucz do szyfru używanego przez Hiszpanów? Królowi Hiszpanii wydawało się niemożliwe, że jeden człowiek potrafi złamać szyfr, który zbudowany był z około 500 symboli. Wniósł więc skargę do papieża o używanie przez Francuzów czarnej magii.

Dziś wyrażania algebraiczne są używane powszechnie – do zapisywania wzorów, równań, a nawet oznaczeń na metkach ubrań. Ważna jest zatem umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi – przekształcanie ich i sprowadzanie do najprostszej postaci. A w szczególności dodawania i odejmowania.



François Viète

Źródło: domena publiczna.

- Zapiszesz w prostszej postaci wyrażania zawierające sumy i różnice algebraiczne.
- Wykorzystasz wyrażania algebraiczne do dowodzenia twierdzeń.

Przeczytaj

Przypomnienie najważniejszych pojęć

Wyrażenia algebraiczne to liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań. W wyrażeniach algebraicznych mogą występować też nawiasy.

Przykłady wyrażań algebraicznych	
Zapis symboliczny	Nazwa
$x + 6y$	Suma
$7x - 3xy$	Różnica
abc	Iloczyn
$(a - b) : (c + d)$	Iloraz

Jednomian to liczba lub litera, lub iloczyn liter, lub iloczyn liczb i liter.

Przykłady jednomianów
$5x; -cde; 0, 2x^3y; 6; abc \cdot 3a$

Jednomian staramy się zapisać w **postaci uporządkowanej** – najpierw zapisujemy współczynnik liczbowy, następnie zmienne w porządku alfabetycznym.

Przykłady jednomianów w postaci uporządkowanej	
Jednomian	Współczynnik liczbowy
jk	1
$9a^3x$	9
$-m$	-1
$\frac{3}{4}abc^5d^7$	$\frac{3}{4}$

Jednomiany, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, nazywamy **podobnymi**. Jednomiany podobne składają się z tych samych zmiennych, występujących w tej samej potęgze.

Przykłady jednomianów podobnych		
$ab; -3ab; 0, 4ab$	$2x^3; x^3; 1, 2x^3$	$3mp^2; -mp^2; 7mp^2$

Suma algebraiczna (wielomian) to wyrażenie algebraiczne, w którym występuje dodawanie jednomianów. Składniki sumy nazywamy **wyrazami sumy algebraicznej**.

Przykłady sum algebraicznych	
Suma	Wyrazy sumy
$x + 5$	$x, 5$

Przykłady sum algebraicznych

Suma	Wyrazy sumy
$3x - y + 20$	$3x, -y, 20$

Wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego, to liczba, którą otrzymamy, gdy do danego wyrażenia w miejsce niewiadomych (liter), wstawimy dane liczby i wykonamy wskazane działania.

Przykłady obliczania wartości liczbowej wyrażeń algebraicznych

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia $5x - 3y + 1$, jeśli $x = 0, y = -1$	$5 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3 + 1 = 4$
--	--

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Aby dodać lub odjąć sumy algebraiczne, należy najpierw **opuścić nawiasy**, o ile istnieją, a następnie wykonać **redukcję wyrazów podobnych**, o ile to możliwe. Przy czym nawiasy poprzedzone znakiem „+” usuwamy, bez zmiany znaków przed wyrazami w nawiasach. Nawiasy poprzedzone znakiem - usuwamy, zmieniając znak każdego wyrazu występującego w nawiasie na przeciwny.

Przykład 1

Dodamy następujące wyrażenia:

- $x - 4y + 2$,
- $2x + y - 1$,
- $-3x + y$.

$$\begin{aligned}(x - 4y + 2) + (2x + y - 1) + (-3x + y) &= \\= x - 4y + 2 + 2x + y - 1 - 3x + y &= \\= -2y + 1 &= \end{aligned}$$

Zauważ, że przed każdym z nawiasów stał znak „+”, zatem opuszczając nawiasy nie zmienialiśmy znaków jednomianów zapisanych w nawiasach.

Przykład 2

Odejmiemy wyrażenia $6ac - 2d + 5$ i $3ac - d + 1$.

$$\begin{aligned}(6ac - 2d + 5) - (3ac - d + 1) &= \\= 6ac - 2d + 5 - 3ac + d - 1 &= \\= 3ac - d + 4 &= \end{aligned}$$

Zauważ, że przed drugim nawiasem stał znak „-”, zatem opuszczając nawias, zmienialiśmy znaki jednomianów zapisanych w nawiasie na przeciwne.

Przykład 3

Niech

$$A = -6xy^3 - 5x + 4,$$

$$B = 2 - 3x + 2xy^3,$$

$$C = 2x - 2.$$

Zapiszemy w prostszej postaci wyrażenie:

$$C - [(A - B) + (B - A) + A].$$

1 sposób

Sprowadzamy najpierw do najprostszej postaci wyrażenie $C - [(A - B) + (B - A) + A]$, a następnie do wyniku podstawiamy odpowiednie wyrażenia, opuszczamy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} C - [(A - B) + (B - A) + A] &= \\ &= C - (A - B + B - A + A) = C - A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C - A &= (2x - 2) - (-6xy^3 - 5x + 4) = \\ &= 2x - 2 + 6xy^3 + 5x - 4 = 6xy^3 + 7x - 6 \end{aligned}$$

2 sposób

Oznaczmy: $K = C - [(A - B) + (B - A) + A]$.

W miejsce A, B, C podstawiamy odpowiednie wyrażenia, wykonujemy wskazane działania i redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} K &= 2x - 2 - [(-6xy^3 - 5x + 4 - 2 + 3x - 2xy^3) + \\ &+ (2 - 3x + 2xy^3 + 6xy^3 + 5x - 4) + (-6xy^3 - 5x + 4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= 2x - 2 - [(-8xy^3 - 2x + 2) + \\ &+ (8xy^3 + 2x - 2) + (-6xy^3 - 5x + 4)] \end{aligned}$$

$$K = 2x - 2 - (0 - 6xy^3 - 5x + 4)$$

$$K = 2x - 2 + 6xy^3 + 5x - 4$$

$$K = 6xy^3 + 7x - 6$$

Przykład 4

Wykażemy, że suma 6 kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest podzielna przez 3.

Oznaczmy:

$a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$ - kolejne liczby naturalne dodatnie.

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 = 6a + 15 = 3(2a + 5)$$

Liczba $2a + 5$ jest liczbą naturalną.

Zatem iloczyn liczby 3 i liczby $2a + 5$ jest podzielny przez 3.

Przykład 5

Wykażemy, że suma dwóch liczb naturalnych, z których pierwsza przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, a druga przy dzieleniu przez 10 daje resztę 3, dzieli się przez 5.

Oznaczmy:

$5a + 2$ - liczba, która w dzieleniu przez 5 daje resztę 2,

$10b + 3$ - liczba, która w dzieleniu przez 10 daje resztę 3.

$$(5a + 2) + (10b + 3) = 5a + 2 + 10b + 3 = 5a + 10b + 5 = 5(a + 2b + 1)$$

Liczba $a + 2b + 1$ to liczba naturalna, zatem iloczyn $5(a + 2b + 1)$ dzieli się przez 5.

Słownik

suma algebraiczna (wielomian)

wyrażenie algebraiczne, w którym występuje dodawanie jednomianów

wyrazy sumy algebraicznej

składniki sumy algebraicznej

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Celem testów samosprawdzających jest utrwalenie tego, co już wiesz o wyrażeniach algebraicznych i rozwinięcie umiejętności związanych z dodawaniem i odejmowaniem sum algebraicznych.

Jeśli uda ci się poprawnie rozwiązać wszystkie zadania, jesteś prawdziwym mistrzem!



Test

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

4 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

Polecenie 2

Wymyśl podobne zadania i zaproś koleżankę lub kolegę do ich rozwiązania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia zawierające sumy i różnice algebraiczne,
- formułuje proste twierdzenia matematyczne i udowadnia je, wykorzystując wyrażenia algebraiczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- okienko informacyjne
- testy samosprawdzające

Formy pracy:

- praca w małych parach
- praca w parach
- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer
- duże kartony, mazaki

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Ich zadaniem jest rozszyfrowanie krótkiego tekstu, który zawiera temat lekcji.
Zaszyfrowaną wiadomość przygotował wcześniej jeden z uczniów, na polecenie nauczyciela.
Po skończonej pracy, uczniowie prezentują najskuteczniejsze ich zdaniem sposoby rozszyfrowania wiadomości. Wspólnie zastanawiają się, czy i jak można by wykorzystać wyrażenia algebraiczne układając i łamiąc szyfry.
2. Uczniowie pracują w 4 – 5 grupach. Zadaniem każdej z grup jest wykonanie mapy myśli, zawierające dotychczas poznane pojęcia związane z wyrażeniami algebraicznymi. Prezentacje podsumowująca pracę grup są okazją do wyjaśnienia wątpliwości, rozszerzenia wiadomości.
3. Nauczyciel podaje temat zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Uczniowie pracują w 4 grupach metodą okienka informacyjnego. Każda grupa otrzymuje duży arkusz papieru podzielony na części 2 liniami poziomymi i 2 pionowymi. W środkowe okienko grupa 1 i grupa 2 wpisują – dodawanie sum algebraicznych, grupa 3 i grupa 4 wpisują – odejmowanie sum algebraicznych. Zadaniem uczniów jest przypomnienie praw działań dotyczących dodawania (grupy 1 i 2) bądź odejmowania liczb, przy czym odejmowanie traktujemy jako dodawanie liczby przeciwnej (grupa 3 i 4), zapisanie tych praw symbolicznie w okienkach pierwszego wiersza utworzonego na planszy. W drugim wierszu uczniowie podają przykłady zastosowania praw działań (tylko łączności i przemienności) zapisane za pomocą liczb oraz za pomocą liter.
2. Teraz zadaniem każdej grupy jest zapisanie 2 sum algebraicznych (z których każda ma co najmniej 4 wyrazy), zbudowanych tak, aby każdy wyraz pierwszej sumy był podobny do co najmniej jednego wyrazu drugiej sumy i dodanie (gr. 1 i 2) bądź odjęcie (gr. 3 i 4) zapisanych sum.

Całą procedurę każda z grup powtarza jeszcze dwukrotnie, wypełniając pozostałe okienka powstałe na planszy.

3. Grupy 1 i 2 oraz 3 i 4 wymieniają swoje spostrzeżenia i formułują wniosek – w jaki sposób dodajemy/odejmujemy sumy algebraiczne. Uzgodnione wnioski zapisują na tablicy.
4. Uczniowie w parach analizują przykłady przekształcania sum algebraicznych i wykorzystania ich w dowodzeniu twierdzeń (przykłady 3-5).

Faza podsumowująca

1. Wybrani uczniowie prezentują wiadomości uzyskane w czasie zajęć .
2. Uczniowie w parach (lub indywidualnie) rozwiązują zadania z gry dydaktycznej.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Ułożenie krzyżówki matematycznej, wykorzystując dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych.

Materiały pomocnicze:

Przykłady prostych szyfrów, które można złamać, wykorzystując wyrażenia algebraiczne.

- [Szyfr przesuwający](#)
- [Tajny szyfr biurowca](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Testy samosprawdzające można wykorzystać do rywalizacji grupowej. Jeśli będzie 5 grup, każda grupa losuje jedno pytanie z danego obszaru trudności. Jeśli nie odpowie poprawnie na pytanie – odpada z gry. Zwycięży ta grupa, która najszybciej odpowie na wylosowane pytania.

Testy samosprawdzające mogą być też przeprowadzone jako krótka karkówka – wtedy każdy z uczniów musi rozwiązać po jednym zadaniu (wybrany przez siebie) z danego obszaru trudności.