



Pole trójkąta

Materiał składa się z sekcji: "Wzór na pole trójkąta", "Pole trójkąta równobocznego".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), ćwiczenia, w tym interaktywne.

Aplet: wyznaczanie wzoru na pole trójkąta.

Zawartość tekstowa: twierdzenie - pole trójkąta, twierdzenie - pole trójkąta prostokątnego, pole trójkąta równobocznego.

Ćwiczenia: wyznaczanie pola trójkąta (w tym równobocznego i prostokątnego), również w sytuacjach praktycznych.

Pole trójkąta

Wzór na pole trójkąta

Przykład 1

Rysunek przedstawia trójkąt ABC o podstawie a i wysokości h . Odcinek DE dzieli wysokość trójkąta na dwie równe części.

Przemieszczając odpowiednio części trójkąta, zbuduj prostokąt. Określ długości boków tego prostokąta i oblicz jego pole.

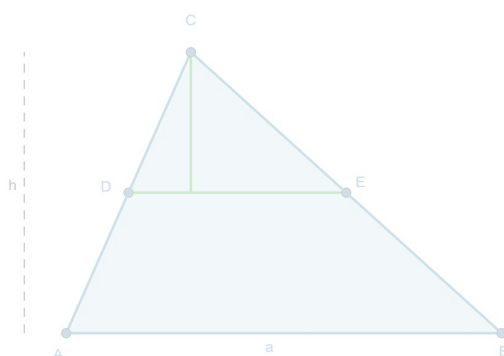
Twoim zadaniem jest wyznaczenie wzoru na pole trójkąta ABC o podstawie a i wysokości h .

Za pomocą suwaka możesz tak przemieścić części trójkąta, aby zbudować prostokąt.

$\alpha = 0$

Jakie jest pole tego prostokąta w porównaniu z polem trójkąta ABC ?
Jakie są: długość podstawy i wysokość tego prostokąta?
Dlaczego?

Czy potrafisz już wyrazić wzorem pole trójkąta?



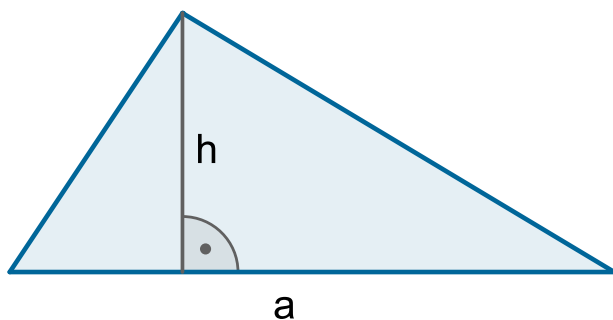
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PnUuyLJ4t>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czy pole trójkąta ABC jest większe, czy mniejsze od pola otrzymanego prostokąta? Dlaczego?

Twierdzenie: Pole trójkąta

Pole P trójkąta o wysokości h poprowadzonej do podstawy długości a jest równe $P = \frac{a \cdot h}{2}$.

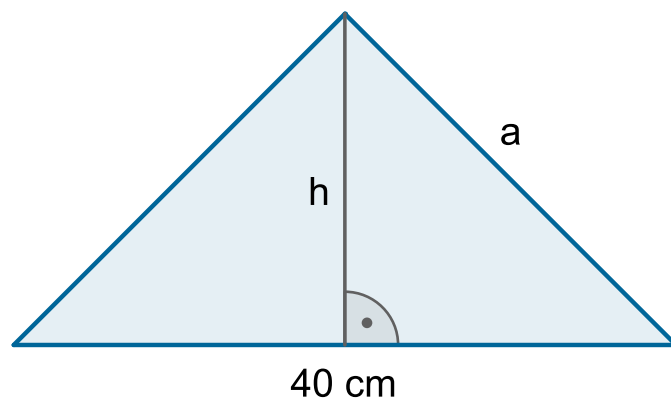


$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Pole trójkąta równoramiennego jest równe 420 cm^2 . Oblicz obwód trójkąta, jeżeli jego podstawa ma długość 40 cm .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy wysokość h trójkąta.

$$420 = \frac{40 \cdot h}{2}$$

$$h = 21 \text{ cm.}$$

Obliczamy długość a boku trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$h^2 + \left(\frac{40}{2}\right)^2 = a^2$$

$$21^2 + 20^2 = a^2$$

$$441 + 400 = a^2$$

$$841 = a^2$$

$$a = \sqrt{841} = 29$$

$$a = 29 \text{ cm.}$$

Obliczamy obwód trójkąta.

$$L = 2a + 40$$

$$L = 2 \cdot 29 + 40 = 98$$

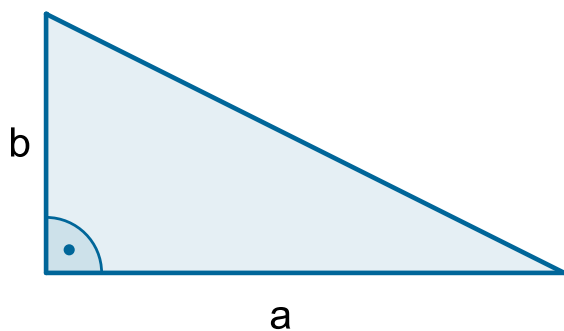
$$L = 98 \text{ cm.}$$

Obwód trójkąta jest równy 98 cm.

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne są zarazem wysokościami trójkąta. Zatem, aby obliczyć pole trójkąta prostokątnego, wystarczy znać długości jego przyprostokątnych.

Twierdzenie: Pole trójkąta prostokątnego

Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b jest równe $P = \frac{a \cdot b}{2}$.



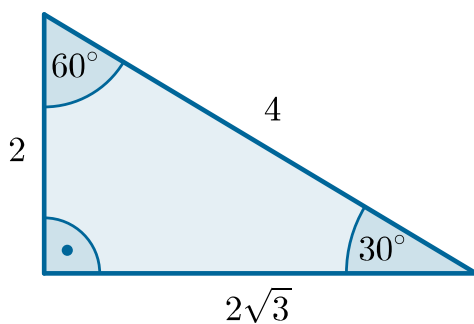
$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Oblicz pole trójkąta, w którym miary dwóch kątów są równe 30° i 60° , a najdłuższy bok jest równy 4.

W trójkącie, w którym miary dwóch kątów są równe 30° i 60° , trzeci kąt ma miarę 90° .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem jest to trójkąt prostokątny.

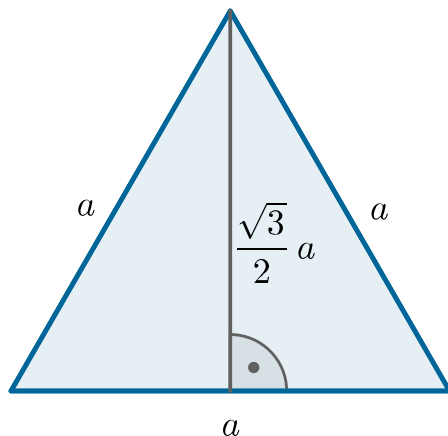
Najdłuższy bok to przeciwprostokątna, ma ona długość 4. Z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości 2 i $2\sqrt{3}$.

Obliczamy pole trójkąta.

$$P = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Pole trójkąta jest równe $2\sqrt{3}$.

Pole trójkąta równobocznego



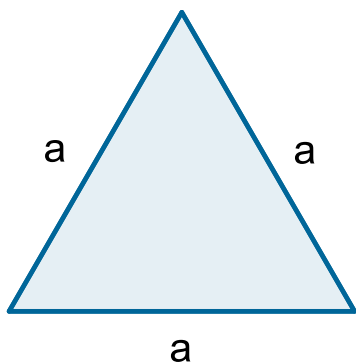
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Wstawiając tę wartość do wzoru na pole trójkąta, otrzymujemy wzór na pole trójkąta równobocznego

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Twierdzenie: Pole trójkąta równobocznego

Pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest równe $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

Pole trójkąta jest równe P . Podstawa trójkąta ma długość równą wysokości poprowadzonej do tej podstawy. Oblicz długość podstawy. Uzupełnij równość, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

$a =$

$\frac{\sqrt{P}}{2}$ $\sqrt{2P}$ $\sqrt{4P}$ $\frac{\sqrt{2P}}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Pole trójkąta jest równe 20 cm^2 . Oblicz

- wysokość trójkąta, wiedząc, że podstawa do której poprowadzono wysokość, jest równa 4 cm .
- długość podstawy trójkąta, wiedząc, że wysokość poprowadzona do tej podstawy, jest równa 1 dm .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Wysokość CD trójkąta ABC dzieli podstawę AB w stosunku $1 : 3$. Wykaż, że pola trójkątów ADC oraz DBC pozostają również w stosunku $1 : 3$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Wysokość CD trójkąta ABC ma długość 8 i dzieli podstawę AB w stosunku 1 : 3. Pole trójkąta jest równe 32. Oblicz pole trójkąta ADC oraz pole trójkąta DBC .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Wysokość CD trójkąta ABC dzieli podstawę AB w stosunku 1 : 3. Oblicz iloraz pól trójkątów ADC oraz DBC . Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Iloraz wynosi

☐ $\frac{1}{5}$

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Dany jest trójkąt o bokach $|AC| = 14$, $|BC| = 20$ oraz wysokości CD równej 12. Oblicz pole wyznaczonego trójkąta. Przeanalizuj jednoznaczność rozwiązania. Uzupełnij równość, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

$P =$

☐ $6(10 + 2\sqrt{13})$

☐ $6(12 + 3\sqrt{13})$

☐ $3(12 + 2\sqrt{13})$

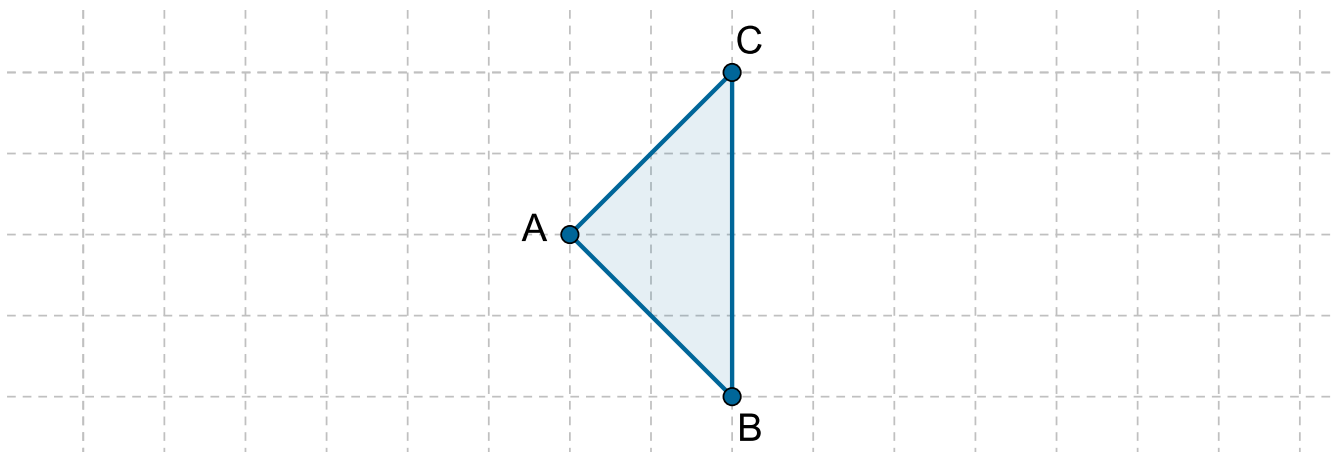
☐ $6(16 + 2\sqrt{13})$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Oblicz pole trójkąta ABC zakładając, że jednostka to jedna kratka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $P = 4\sqrt{3}$

☐ $P = 4$

☐ $P = 3\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 9, 5 cm i 12 cm. Wpisz odpowiednią liczbę w lukę.

cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej długości

1. $6\sqrt{2}$

2. $0,5\sqrt{2}$

3. 1

4. $\frac{2}{5}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

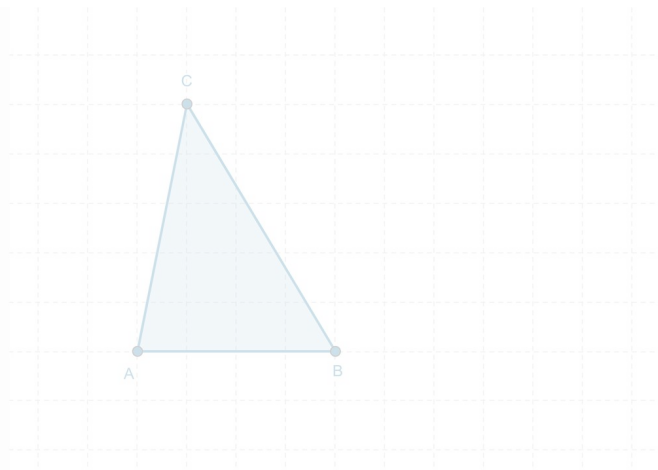
Ćwiczenie 10



Zmień położenie wierzchołków trójkąta ABC tak, aby otrzymać trójkąt prostokątny. Oblicz pole tego trójkąta, przyjmując, że długość jednej kratki jest równa 1.

Zmień położenie wierzchołków trójkąta tak, aby otrzymać trójkąt prostokątny.

Oblicz pole tego trójkąta, przyjmując, że długość jednej kratki jest równa 1.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PnUuyLJ4t>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Pole trójkąta prostokątnego jest równe 12. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, wiedząc, że

1. pierwsza przyprostokątna ma długość 4
2. pierwsza przyprostokątna jest równa drugiej
3. pierwsza przyprostokątna jest dwukrotnie dłuższa od drugiej
4. pierwsza przyprostokątna jest trzykrotnie krótsza od drugiej

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Oblicz obwód L trójkąta prostokątnego wiedząc, że:

1. jego pole jest równe 6, a jedna z przyprostokątnych ma długość 4,
2. jego pole jest równe 30, a jedna z przyprostokątnych ma długość 12,
3. jego przyprostokątne są równe, a pole wynosi 24, 5.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Udowodnij, że pole trójkąta rozwartokątnego jest różnicą pól dwóch trójkątów prostokątnych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Oblicz pole P trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma długość 80, a ramię 41.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 10, a jego podstawa ma długość 16. Oblicz pole tego trójkąta.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Oblicz obwód L trójkąta równoramiennego, którego pole jest równe 660, a podstawa ma długość 120.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Zaznacz poprawne dokończenie zdania.

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{2}$ dm wynosi

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$

☐ 2 dm^2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Zaznacz poprawne dokończenie zdania.

Pole P trójkąta równobocznego o wysokości $9\sqrt{3}$ cm wynosi

☐ $80\sqrt{3} \text{ cm}^2$

☐ $81\sqrt{3} \text{ cm}^2$

☐ 100 cm^2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Zaznacz poprawne dokończenie zdania.

Pole trójkąta równobocznego o obwodzie 12 mm wynosi

☐ $\sqrt{3} \text{ mm}^2$

☐ $12\sqrt{3} \text{ mm}^2$

☐ $4\sqrt{3} \text{ mm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Połącz w pary pola trójkątów równobocznych z wysokościami tych trójkątów równobocznych.

$$P = 16\sqrt{3}$$

$$h = 4\sqrt{3}$$

$$P = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$P = 15\sqrt{3}$$

$$h = 3\sqrt{5}$$

$$P = 2\sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{6}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Ile wynosi obwód trójkąta równobocznego o polu $P = 36\sqrt{3}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $L = 24\sqrt{3}$

☐ $L = \frac{23\sqrt{3}}{3}$

☐ $L = 12$

☐ $L = 36$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Zaznacz wszystkie zdania falsywne.

☐ Jeśli pole trójkąta równobocznego wyraża się liczbą niewymierną, to również obwód tego trójkąta wyraża się liczbą niewymierną.

☐ Pole trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{3}$ wyraża się liczbą naturalną.

☐ Pole trójkąta równobocznego zawsze wyraża się liczbą niewymierną.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.