



Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego - przykłady

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych. Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi kątów w trójkącie prostokątnym.

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego - przykłady

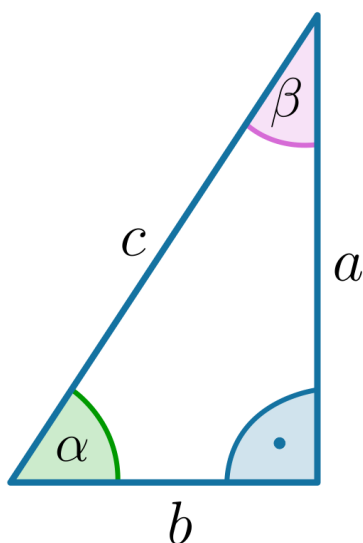
W tym materiale znajdują się przykłady, które pokazują w jaki sposób obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów w trójkącie prostokątnym. Zdobytą w nim wiedzę możesz wykorzystać w materiałach [Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym - zadania](#) oraz [Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi - zadania](#).

Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

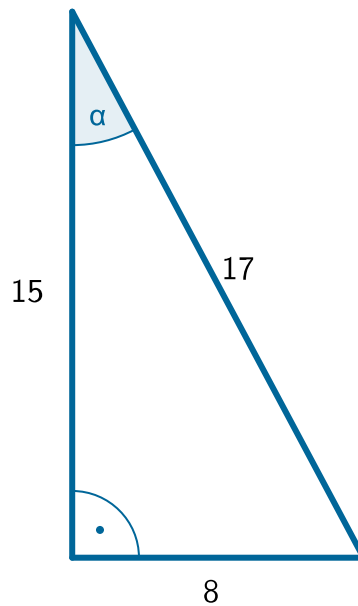
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Tabela dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych dla najczęściej spotykanych kątów:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 1

Trójkąt na rysunku jest prostokątny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dla tego trójkąta zachodzą następujące związki trygonometryczne:

$$\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$$

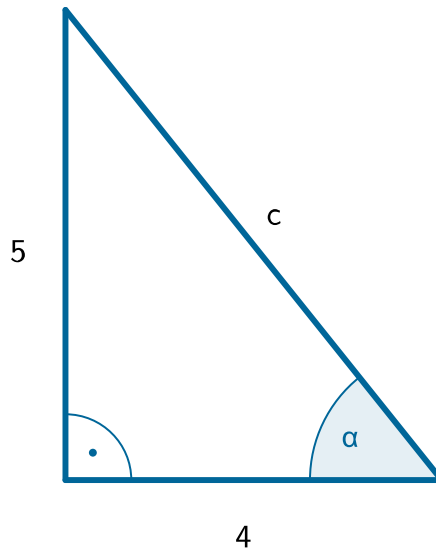
oraz

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{17}, \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{8}{17}, \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{8}.$$

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5, a druga przyprostokątna ma długość 4. Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej c tego trójkąta

$$c^2 = 4^2 + 5^2.$$

Ponieważ $c > 0$, stąd

$$c = \sqrt{41}.$$

Zatem

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

czyli

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \cos \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}.$$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{2 \sin 42^\circ + 3 \cos 48^\circ}{5 \cos 48^\circ - 4 \sin 42^\circ}.$$

Zauważmy, że

$$42^{\circ} + 48^{\circ} = 90^{\circ}.$$

Wobec tego

$$\cos 48^{\circ} = \cos(90^{\circ} - 42^{\circ}) = \sin 42^{\circ},$$

a zatem

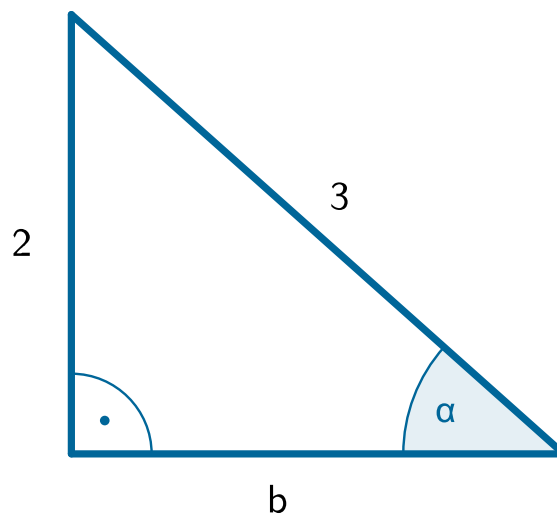
$$\frac{2 \sin 42^{\circ} + 3 \cos 48^{\circ}}{5 \cos 48^{\circ} - 4 \sin 42^{\circ}} = \frac{2 \sin 42^{\circ} + 3 \sin 42^{\circ}}{5 \sin 42^{\circ} - 4 \sin 42^{\circ}} = \frac{5 \sin 42^{\circ}}{\sin 42^{\circ}} = 5.$$

Przykład 4

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Znajdziemy wartości $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Wystarczy w tym celu rozpatrzeć dowolny trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{2}{3}$.

Najprostszym przykładem jest trójkąt o przeciwprostokątnej długości 3 i jednej z przyprostokątnych długości 2. Kąt α leży wtedy naprzeciwko tej przyprostokątnej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość b drugiej przyprostokątnej

$$2^2 + b^2 = 3^2.$$

Ponieważ $b > 0$, stąd

$$b = \sqrt{5}.$$

Zatem

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

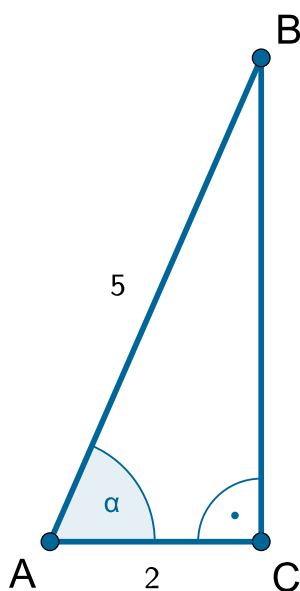
czyli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 5

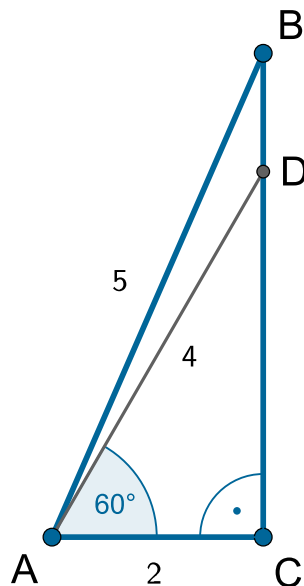
Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, to $\alpha > 60^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC , w którym $|AC| = 2$ i $|AB| = 5$. Wtedy $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{2}{5}$, co oznacza, że miary kątów $|\sphericalangle BAC|$ i α są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wyberzmy na przyprostokątnej BC taki punkt D , że $|AD| = 4$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wówczas $\cos(\sphericalangle DAC) = \frac{2}{4}$, czyli $\cos(\sphericalangle DAC) = \frac{1}{2}$, więc $|\sphericalangle DAC| = 60^\circ$. Ponieważ $|\sphericalangle DAC| < |\sphericalangle BAC|$, to $60^\circ < \alpha$. Koniec dowodu.

Uwaga. Zestaw wzorów, przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki, zawiera tablicę wartości funkcji trygonometrycznych. Można z niej odczytać, że $\cos 68^\circ \approx 0,4040$ i $\cos 69^\circ \approx 0,3839$. Wynika stąd, że kąt ostry α , dla którego $\cos \alpha = 0,4$, jest kątem z przedziału $(68^\circ, 69^\circ)$.