



Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

Źródło: James Orr, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Poznane dotychczas wzory określające pochodne wybranych funkcji elementarnych znajdują szerokie zastosowanie w rachunku różniczkowym i optymalizacji. Znasz już między innymi wzór na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym. Pod lupę weźmiemy dziś wzór na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym.

Twoje cele

- Dokonasz analizy dowodu twierdzenia o pochodnej funkcji potęgowej dla wybranych wykładników wymiernych.
- Wyznaczysz pochodne wybranych funkcji potęgowych o wykładnikach rzeczywistych, w szczególności o wykładnikach całkowitych ujemnych i wymiernych.

Przeczytaj

Poznane dotychczas wzory opisujące pochodne **funkcji elementarnych** będą znajdowały zastosowanie w optymalizacji. Najpierw jednak poznasz kolejne własności pojęcia pochodnej funkcji. Niniejsza lekcja pokaże w jaki sposób wyznaczać pochodne **funkcji potęgowych** o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

Jak już wiemy, jeśli f jest funkcją potęgową postaci $f(x) = x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, wówczas pochodna f' funkcji wyrażona jest za pomocą wzoru

$$f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Okazuje się, iż powyższy wzór pozostaje również prawdziwy dla funkcji potęgowych o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

Twierdzenie: Pochodna funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

Niech f będzie dowolną funkcją potęgową postaci $f(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ jest dowolnym wykładnikiem rzeczywistym. Wówczas pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Dowód

Korzystając z definicji **pochodnej funkcji w punkcie**, udowodnimy powyższe twierdzenie dla szczególnego przypadku funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, czyli funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Niech x będzie dowolnym argumentem, dla którego funkcja f jest określona. Wówczas

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Zauważ, że stosując wprowadzony wzór na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ do funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ otrzymamy ten sam wynik.

Wystarczy funkcję f zapisać w postaci $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, aby otrzymać

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Warto zwrócić uwagę na fakt użyteczności oraz możliwość obszernego zastosowania wprowadzonego powyżej wzoru. Za jego pomocą znaleźć możesz pochodne funkcji potęgowych nie tylko o wykładniku naturalnym, ale także pochodne funkcji potęgowych

o wykładniku całkowitym ujemnym, jak na przykład $y = \frac{1}{x^2}$, bądź pochodne funkcji potęgowych o wykładniku wymiernym, jak na przykład $y = \sqrt{x}$ czy $y = \sqrt[3]{x}$.

Rozpocniemy od wyznaczenia pochodnych wybranych funkcji potęgowych o wykładniku całkowitym ujemnym.

Przykład 1

Korzystając z wzoru na pochodną funkcji potęgowej, znajdziemy pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Najpierw zapiszmy funkcję f jako $f(x) = x^{-1}$. Zauważmy, że wykładnik $\alpha = -1$, zatem $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Przykład 2

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Znajdziemy pochodną funkcji f w dowolnym punkcie $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Zauważ, że funkcję f możemy zapisać w postaci $f(x) = x^{-3}$, gdzie wykładnik $\alpha = -3$. Korzystając z wzoru na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym, otrzymamy $f'(x) = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

Kolejne funkcje, których pochodne wyznaczymy za pomocą powyższego wzoru, to funkcje potęgowe o wykładniku wymiernym dodatnim.

Przykład 3

Znajdziemy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[4]{x}$ dla $x \geq 0$.

Rozwiązanie

Funkcję f zapiszemy w postaci $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, gdzie wykładnik $\alpha = \frac{1}{4}$.

Pochodna funkcji f będzie postaci $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Przykład 4

Wyznaczmy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[5]{x^9}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

W tym celu funkcję f należy zapisać jako $f(x) = x^{\frac{9}{5}}$, aby otrzymać

$$f'(x) = \left(x^{\frac{9}{5}}\right)' = \frac{9}{5} \cdot x^{\frac{9}{5}-1} = \frac{9}{5} x^{\frac{4}{5}} = \frac{9\sqrt[5]{x^4}}{5}.$$

Na koniec wyznaczymy pochodne wybranych funkcji potęgowych o wykładniku wymiernym ujemnym.

Przykład 5

Znajdziemy pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie

Funkcję f zapiszemy jako $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, gdzie wykładnik $\alpha = -\frac{1}{2}$. Zatem pochodna f' funkcji f będzie równa $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

Przykład 6

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$. Chcemy wyznaczyć pochodną tej funkcji korzystając z wzoru na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym.

Rozwiązanie

Zapiszemy najpierw funkcję f w postaci $f(x) = x^{-\frac{7}{3}}$. Zauważ, że wówczas wykładnik $\alpha = -\frac{7}{3}$. Stosując się do wprowadzonego powyżej wzoru, otrzymamy

$$f'(x) = \left(x^{-\frac{7}{3}}\right)' = -\frac{7}{3} \cdot x^{-\frac{7}{3}-1} = -\frac{7}{3} x^{-\frac{10}{3}} = -\frac{7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}.$$

Słownik

funkcje elementarne

funkcje, które możemy otrzymać z tak zwanych **podstawowych funkcji elementarnych** za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych, składania oraz odwracania funkcji. Do **podstawowych funkcji elementarnych** należą:

- funkcje stałe
- funkcje potęgowe
- funkcje wykładnicze
- funkcje logarytmiczne
- funkcje trygonometryczne

funkcja potęgowa o wykładniku α

funkcja określona wzorem $f(x) = x^\alpha$. Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika α

pochodna funkcji w punkcie

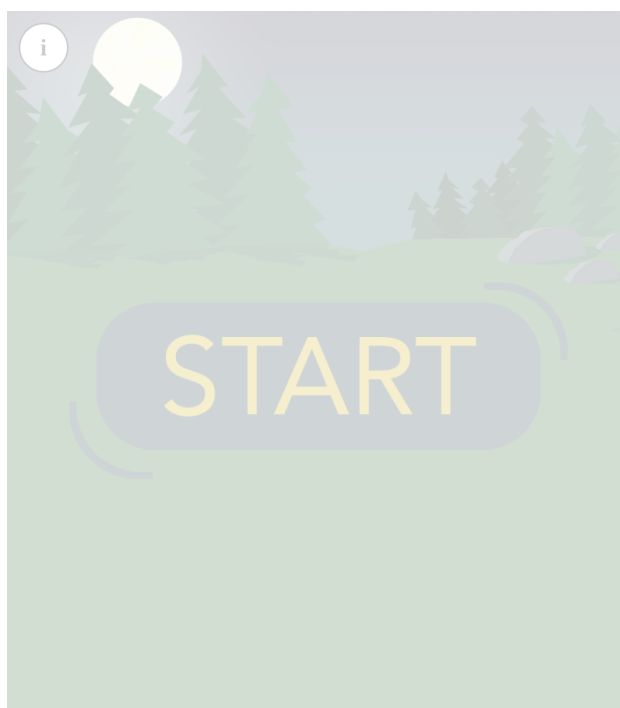
granica właściwa ilorazu różnicowego

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Aby utrwalić wzór na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym, zagraj w poniższą grę.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dr1Vuyr9X>

Polecenie 2

Wyznacz pochodne następujących funkcji potęgowych:

- $f(x) = \sqrt[6]{x}$,

- $g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

Polecenie 3

Znajdź pochodne poniższych funkcji potęgowych o wykładniku rzeczywistym:

- $f(x) = \sqrt[9]{x^4},$

- $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
- $g(x) = \frac{1}{x^2}$,
- $h(x) = \sqrt{x^3}$.

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ jest równa:

☐ $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

☐ $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

☐ $f'(x) = \frac{1}{2x}$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pochodna funkcji $f(x) = \sqrt{x^5}$ jest równa:

☐ $f'(x) = \sqrt{5x^4}$

☐ $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt{x^3}}$

☐ $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x^5}}$

☐ $f'(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary poniższe funkcje i odpowiadające im pochodne.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

$f(x) = \frac{1}{x^4}$

$f'(x) = \frac{5}{6\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$

$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$

$f(x) = \sqrt[6]{x^5}$

$f'(x) = -\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij tabelę.

$$\frac{1}{x^{30}}, \sqrt[6]{x}, \frac{7\sqrt{x^5}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}, \frac{1}{30x^{29}}, -\frac{6}{x^7}, \frac{1}{x^7}, \sqrt{x}$$

Funkcja $f(x)$	Pochodna $f'(x)$
$\frac{1}{x^{30}}$	
$\sqrt[6]{x}$	
	$\frac{7\sqrt{x^5}}{2}$
	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Ćwiczenie 6



Zaznacz w tabeli poprawne komórki.

Funkcja $f(x)$	Pochodna $f'(x)$	Pochodna $f'(x)$
$\sqrt[4]{x^3}$	$\sqrt[4]{3x^2}$ ☐	$\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ ☐
$\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$	$-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$ ☐	$5\sqrt[5]{x^4}$ ☐
$\frac{1}{\sqrt{x^6}}$	$-\frac{3}{x^4}$ ☐	$\frac{1}{\sqrt{6x^5}}$ ☐
$\sqrt[4]{x^9}$	$\frac{4}{9\sqrt[9]{x^5}}$ ☐	$\frac{9\sqrt[4]{x^5}}{4}$ ☐
$\frac{1}{x^{32}}$	$-\frac{32}{x^{33}}$ ☐	$\frac{1}{32x^{31}}$ ☐

Ćwiczenie 7



Połącz w pary poniższe funkcje i odpowiadające im pochodne.

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{8}{3\sqrt[3]{x^{11}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^8}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^5}$$

$$f'(x) = -\frac{8}{x^9}$$

Ćwiczenie 8



Uzupełnij tekst.

Wzór określający pochodną funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym, całkowitym bądź wymiernym możemy zapisać następująco:

- gdy $\alpha \in \mathbb{N}$ i $\alpha = n$, to $(x^\alpha)' = (x^n)' = \boxed{}$

- gdy $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$ i α jest postaci $\alpha = -n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$(x^\alpha)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \boxed{}$

- gdy $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$ i α jest postaci $\alpha = \frac{n}{m}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, to

$(x^\alpha)' = \left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \boxed{}$

- gdy $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha < 0$ i α jest postaci $\alpha = -\frac{n}{m}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, to

$(x^\alpha)' = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}\right)' = \boxed{}$

$$nx^n$$

$$-\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{n-m}}}$$

$$\frac{1}{nx^n}$$

$$nx^{n-1}$$

$$\frac{n\sqrt[m]{x^{n-m}}}{m}$$

$$\frac{m\sqrt[m]{x^{n-m}}}{n}$$

$$-\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$-\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}$$

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kruszelnicka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa IV

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sklasyfikuje funkcje potęgowe
- wykorzystuje pojęcie ilorazu różnicowego
- stosuje poznane wiadomości do wyznaczania pochodnych wybranych funkcji potęgowych o wykładniku rzeczywistym
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- sztafeta zadaniowa

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kolorowe kartki A4, długopisy

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz przedstawia kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna od rekapitulacji wiadomości zawartych w sekcji „Przeczytaj”. Razem z uczniami omawia przykłady zawarte we wspomnianej sekcji.
2. Wybrane zadania z sekcji „Sprawdź się” rozwiązywane są metodą sztafety zadaniowej. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uprzednio przygotowane zadania dla grup nauczyciel przykleja na tablicy (każdej grupie przyporządkowana jest kartka w innym kolorze). Jeden uczeń z każdej grupy podchodzi do tablicy i odrywa pierwsze zadanie. Uczniowie w grupach wspólnie pracują nad zadaniem, rozwiązanie zapisują na kartce. Kolejna osoba z każdej grupy przyczepia kartkę z rozwiązaniem na tablicy i pobiera kolejne zadanie. Nauczyciel systematycznie sprawdza kolejne przyczepione do tablicy rozwiązania zadań. Błędnie rozwiązane zadania wracają do poprawy do uczniów.
3. Po zakończonej sztafecie uczniowie omawiają swoje rozwiązania.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup dzielą się informacjami na temat pracy swojej grupy, prezentują pomysły, przedstawiają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się” oraz grają w grę edukacyjną.

Materiały pomocnicze:

[Pochodna funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać grę edukacyjną do utrwalenia wiadomości z lekcji w ramach pracy domowej.