Pole powierzchni kuli

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Valentin Balan, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W IV wieku p.n.e. Arystoteles przedstawił dowody na kulistość Ziemi. Już w III wieku p.n.e Eratostenes zmierzył obwód Ziemi za pomocą drewnianego kołka. Do dzisiaj wyznaczono też przybliżone pole powierzchni Ziemi, które wynosi około $510000000\ \text{km}^2$. Ponieważ przyjmuje się, że Ziemia ma kształt zbliżony do kuli, zatem do do wyznaczenia jej pola powierzchni wystarczy znać długość jej promienia. W materiale poznamy wzór na pole powierzchni kuli oraz jego zastosowanie. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Poznasz wzór na obliczenie pola powierzchni kuli.
- Zastosujesz pojęcie koła wielkiego do wyznaczenia pola powierzchni kuli.
- Wyznaczysz pole powierzchni kuli na podstawie podanych informacji.
- Wykorzystasz wzór na pole powierzchni kuli do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję kuli oraz koła wielkiego.

Definicja: kula

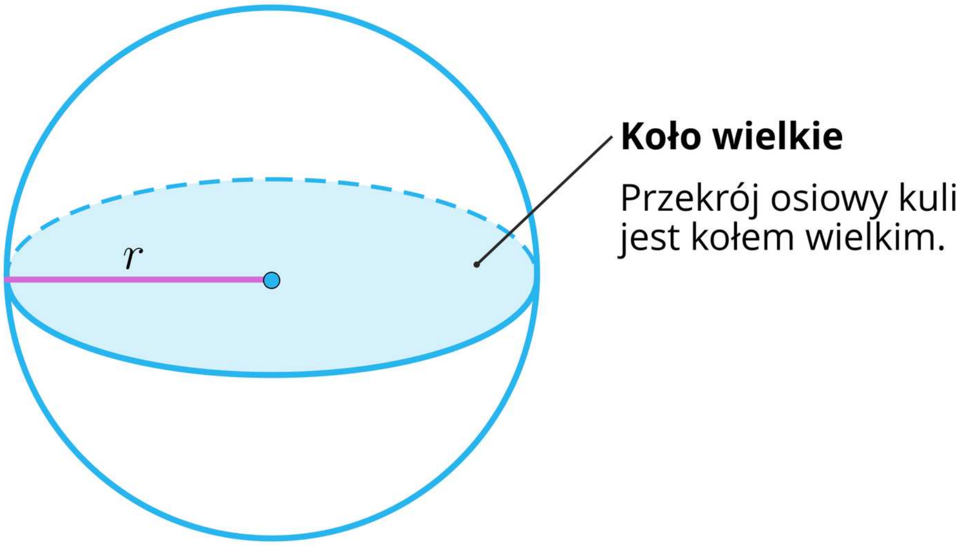
Kulą nazywamy bryłę obrotową, która powstaje przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie koła, do której należy środek koła.

Sferą nazywamy zbiór punktów przestrzeni, które są jednakowo odległe od środka kuli. Kulą nazywamy te punkty przestrzeni, które leżą na sferze, lub są nią ograniczone.

Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem.

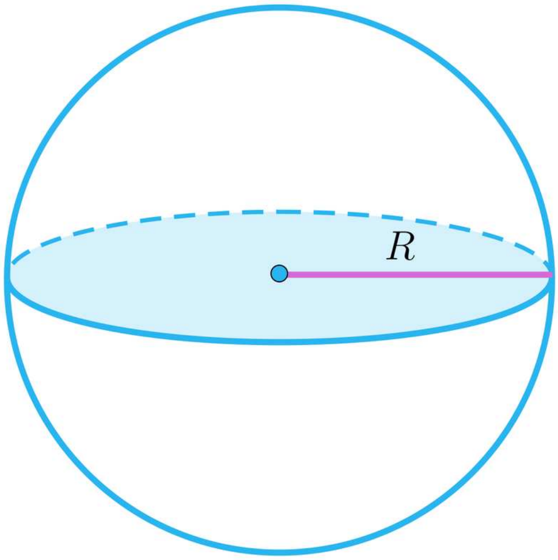
Definicja: koło wielkie

Kołem wielkim nazywamy największe koło, jakie można wpisać w kulę. Długość promienia koła wielkiego jest równa długości promienia kuli.



Pole powierzchni kuli

Dana jest kula o promieniu długości R.



Pole powierzchni kuli obliczamy ze wzoru:

$$P = 4 \cdot \pi \cdot R^2.$$

Ciekawostka

Powierzchnię kuli, nazywaną sferą nie można rozciąć na części, które można rozłożyć na płaszczyźnie, zatem nie możemy narysować siatki tej bryły.

Przykład 1

Wyznaczymy promień kuli, gdy jej pole powierzchni jest równe 196π.

Rozwiązanie

Niech R będzie długością promienia kuli. Korzystając ze wzoru na pole powierzchni kuli, do obliczenia wartości R rozwiązujemy równanie:

$196\pi = 4 \cdot \pi \cdot R^2$.

Po podzieleniu obu stron tego równania przez 4π otrzymujemy:

$R^2 = 49$.

Zatem $R = 7$.

Przykład 2

Promień kuli zwiększono o 20%. Obliczymy, o ile procent wzrosło pole powierzchni kuli.

Rozwiązanie

Niech R_1 będzie długością promienia kuli.

Wówczas pole powierzchni tej kuli wynosi:

$P_1 = 4\pi {R_1}^2$.

Załóżmy, że po zwiększeniu długości promienia kuli o 20% otrzymujemy kulę o promieniu R_2.

Zatem:

$R_2 = 1,2R_1$.

Wtedy pole powierzchni tej kuli wynosi:

$P_2 = 4\pi {R_2}^2 = 4\pi \cdot (1,2R_1)^2 = 1,44 \cdot 4\pi {R_1}^2 = 144\% P_1$.

Różnica pól powierzchni tych kul wynosi:

$P_2 - P_1 = 144\% P_1 - P_1 = 44\% P_1$.

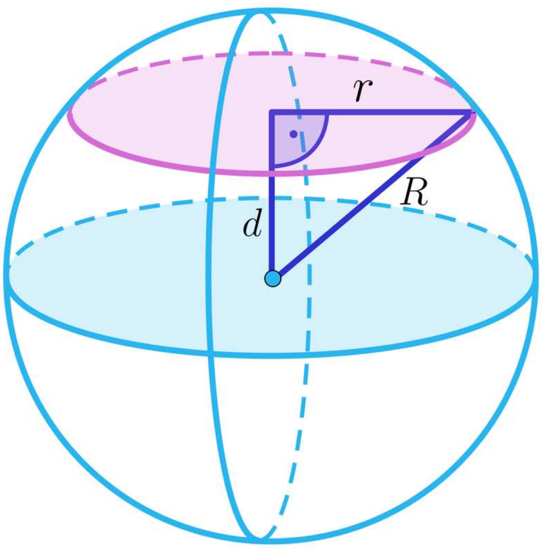
Wobec tego pole kuli wzrosło o 44%.

Przykład 3

Pewną kulę przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o promieniu długości 6 i środku oddalonym od środka kuli o 4. Wyznaczymy pole powierzchni tej kuli.

Rozwiązanie

Narysujmy rysunek pomocniczy do zadania i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Z warunków podanych w zadaniu mamy, że $r = 6$ oraz $d = 4$.

Do wyznaczenia długości promienia R rozpatrywanej kuli zastosujemy twierdzenie Pitagorasa.

Zatem:

$R^2 = r^2 + d^2$

$R^2 = 6^2 + 4^2$

$R^2 = 52$, czyli $R = \sqrt{52}$.

Zatem pole powierzchni kuli jest równe:

$P = 4 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{52}\right)^2 = 208\pi$.

Przykład 4

Obliczymy pole powierzchni kuli, jeżeli pole powierzchni koła wielkiego zawartego w tej kuli wynosi 32π.

Rozwiązanie

Do wyznaczenia długości promienia r koła wielkiego rozwiązujemy równanie:

$32\pi = \pi \cdot r^2$.

Zatem $r^2 = 32$, czyli $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ponieważ długość promienia koła wielkiego jest równa długości promienia kuli, w której to koło jest zawarte, zatem promień kuli $R = 4\sqrt{2}$.

Wobec tego pole powierzchni tej kuli wynosi:

$P = 4\pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 128\pi$.

Przykład 5

Suma pól powierzchni czterech kul o promieniach, których długości tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ wynosi $5\frac{5}{16}\pi$. Wyznaczymy długość promienia najmniejszej kuli.

Rozwiązanie

Niech R_1, R_2, R_3, R_4 oznaczają długości promieni omawianych kul. Jeżeli te długości tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, to długości tych promieni wynoszą odpowiednio:

R_1 – długość promienia największej kuli,

$R_2 = \frac{1}{2}R_1$,

$R_3 = \frac{1}{4}R_1$,

$R_4 = \frac{1}{8}R_1$.

Wobec tego pola powierzchni tych kul wynoszą:

$P_1 = 4\pi {R_1}^2$,

$P_2 = 4\pi {R_2}^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}R_1\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4}{R_1}^2 = \pi {R_1}^2$,

$P_3 = 4\pi {R_3}^2 = 4\pi\left(\frac{1}{4}R_1\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{16}{R_1}^2 = \frac{1}{4}\pi {R_1}^2$,

$P_4 = 4\pi {R_4}^2 = 4\pi\left(\frac{1}{8}R_1\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{64}{R_1}^2 = \frac{1}{16}\pi {R_1}^2$.

Ponieważ suma pól powierzchni tych czterech kul wynosi $5\frac{5}{16}\pi$, zatem do wyznaczenia wartości R_1 rozwiązujemy równanie:

$4\pi {R_1}^2 + \pi {R_1}^2 + \frac{1}{4}\pi {R_1}^2 + \frac{1}{16}\pi {R_1}^2 = 5\frac{5}{16}\pi$

$4\pi {R_1}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 5\frac{5}{16}\pi$

$4\pi {R_1}^2 \cdot \frac{85}{64} = \frac{85}{16}\pi$

${R_1}^2 = 1$, czyli $R_1 = 1$.

Promień najmniejszej kuli ma długość R_4, zatem:

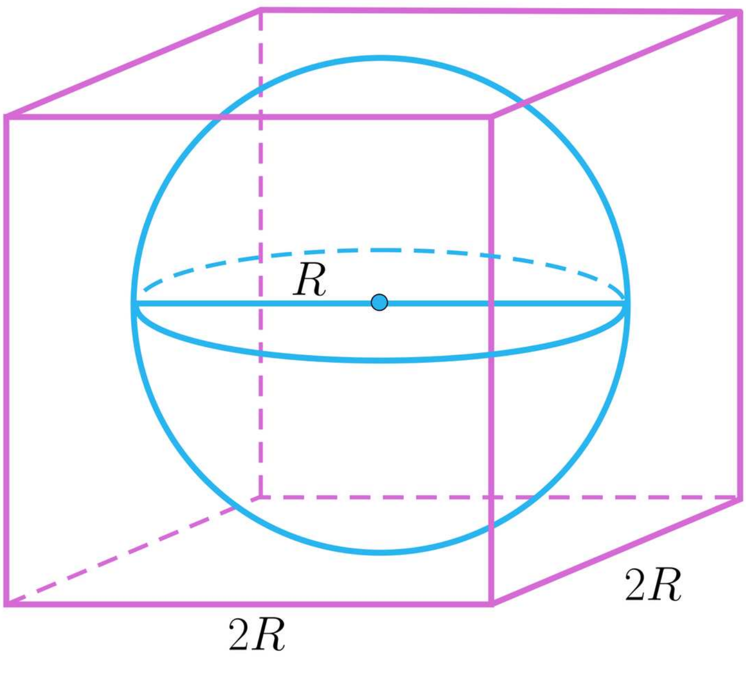
$R_4 = \frac{1}{8}R_1 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$.

Przykład 6

Obliczymy pole powierzchni kuli wpisanej w sześcian o krawędzi 12.

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek pomocniczy i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Zauważmy, że jeśli kula jest wpisana w sześcian, to długość krawędzi sześcianu jest dwa razy większa od długości promienia kuli oraz kula musi być styczna do wszystkich ścian sześcianu.

Wobec tego do wyznaczenia wartości R rozwiązujemy równanie:

$2R = 12$, czyli $R = 6$.

Zatem pole powierzchni kuli wynosi:

$P = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi$.

Słownik

kula

bryła obrotową, która powstaje przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie koła, do której należy środek koła

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym, a następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Promień kuli zmniejszono o 30%. Obliczymy stosunek pola powierzchni większej kuli do pola powierzchni mniejszej kuli.

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm obliczający średnicę i pole powierzchni kuli mając dany jej promień R.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź.

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że jeżeli dwie kule są podobne w skali $k = 3$, to stosunek pola powierzchni mniejszej kuli do pola powierzchni większej kuli wynosi $\frac{1}{9}$.

Ćwiczenie 8

Pewną kulę przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o promieniu długości $2\sqrt{2}$ i środku oddalonym od środka kuli o 6. Wyznacz pole powierzchni tej kuli.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni kuli

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni kuli;
- stosuje pojęcie koła wielkiego do wyznaczenia pola powierzchni kuli;
- wyznacza pole powierzchni kuli na podstawie podanych informacji;
- wykorzystuje wzór na pole powierzchni kuli do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa;

- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Pole powierzchni kuli” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2 w sekcji „Sprawdź się”, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy krok po kroku.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 w sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Kula i sfera.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy dotyczącej obliczania pola powierzchni kuli.