



Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Funkcje trygonometryczne służą do wyznaczania różnych wielkości występujących w życiu codziennym. W materiale omówimy, w jaki sposób wykorzystać przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, które można odczytać w tablicach wartości funkcji trygonometrycznych lub za pomocą kalkulatora. Bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

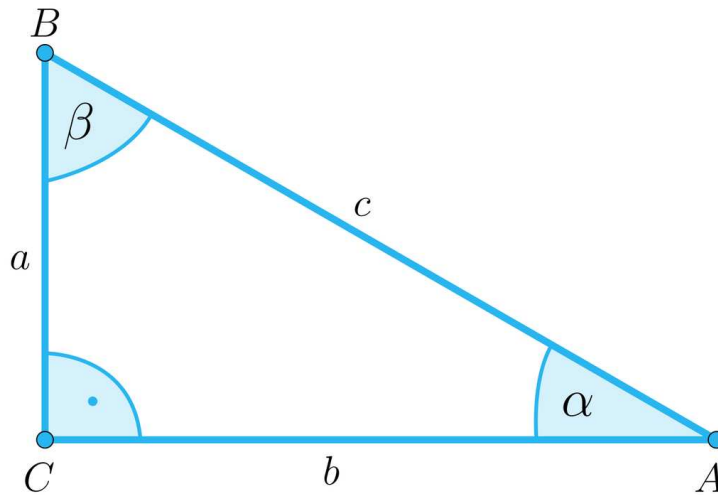
Twoje cele

- Odczytasz przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic matematycznych lub przy użyciu kalkulatora.
- Obliczysz różne wielkości z wykorzystaniem przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych.
- Wyznaczysz miary kątów w trójkącie prostokątnym.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicje **funkcji trygonometrycznych kąta ostrego** w trójkącie prostokątnym.

Narysujmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b , przeciwprostokątnej c oraz kątach ostrych α i β .



Wówczas:

Sinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej, czyli

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ oraz } \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Cosinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej, czyli

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ oraz } \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Tangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie, czyli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \text{ oraz } \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

Dla kąta $\alpha \in (0, 90^\circ)$ zachodzą następujące zależności:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Powyższe zależności nazywamy wzorami redukcyjnymi. Do odczytywania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych posłużymy się tablicami wartości funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Sprawdźmy, czy wartość wyrażenia $\frac{\sin 32^\circ - \cos 44^\circ}{\operatorname{tg} 12^\circ - \sin 83^\circ}$ jest ujemna.

Rozwiązanie:

Jeżeli wykorzystamy tablice wartości funkcji trygonometrycznych, to wartość wyrażenia jest równa:

$$\frac{\sin 32^\circ - \cos 44^\circ}{\operatorname{tg} 12^\circ - \sin 83^\circ} = \frac{0,5299 - 0,7193}{0,2126 - 0,9925} = \frac{-0,1894}{-0,7799} = 0,243 > 0.$$

Zatem wartość podanego wyrażenia nie jest ujemna.

Przykład 2

Wiedząc o tym, że $\sin \alpha = 0,682$, obliczymy wartość wyrażenia $\frac{2 \cdot \sin \alpha - 3 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)}{3 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)} + \sin \alpha$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \sin \alpha - 3 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)}{3 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)} + \sin \alpha &= \frac{2 \cdot \sin \alpha - 3 \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \sin \alpha} + \sin \alpha = \\ &= \frac{-\sin \alpha}{5 \cdot \sin \alpha} + \sin \alpha = -\frac{1}{5} + \sin \alpha = -0,2 + 0,682 = 0,482. \end{aligned}$$

W kolejnym przykładzie skorzystamy z faktu, że tangens kąta nachylenia prostej do osi odciętych w układzie współrzędnych jest równy współczynnikowi kierunkowemu a ze wzoru $y = ax + b$.

Przykład 3

Podamy przybliżone miary kątów ostrych nachylenia prostych do osi X , gdy proste są określone równaniami:

a) $y = \frac{3}{10}x - 2,$

b) $y = 3x + 1,$

c) $y = \frac{5}{7}x - 9.$

Rozwiązanie:

a) Ponieważ $a = \frac{3}{10}$, zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{10}$, czyli $\alpha \approx 17^\circ$

b) Ponieważ $a = 3$, zatem $\operatorname{tg} \alpha = 3$, czyli $\alpha \approx 72^\circ$.

c) Ponieważ $a = \frac{5}{7}$, zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{7}$, czyli $\alpha \approx 36^\circ$.

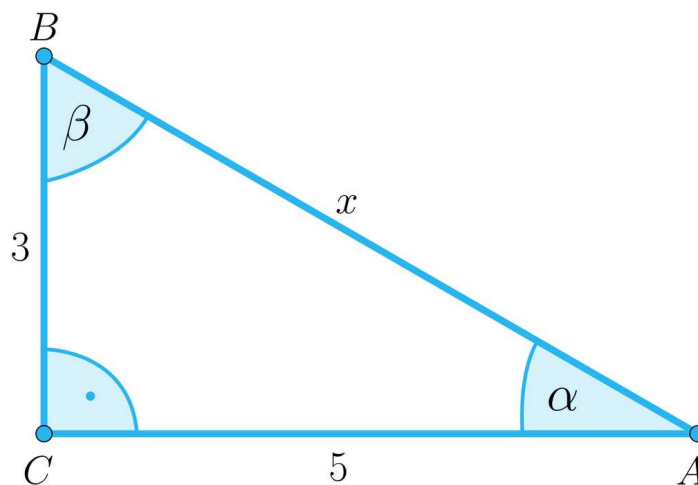
Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych służą również do rozwiązywania trójkątów prostokątnych, czyli znajdowania długości wszystkich boków i kątów w trójkącie prostokątnym.

Przykład 4

Obliczmy długości pozostałych boków oraz miary kątów trójkąta, którego przyprostokątne mają długości 3 i 5.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Długość przeciwprostokątnej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

Zatem

$$3^2 + 5^2 = x^2.$$

Wobec tego $x = \sqrt{34}$.

Do wyznaczenia miar kątów wykorzystamy funkcję trygonometryczną tangens.

Mamy:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3} = 1,666\dots, \text{ czyli } \beta = 59^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \text{ czyli } \alpha = 31^\circ.$$

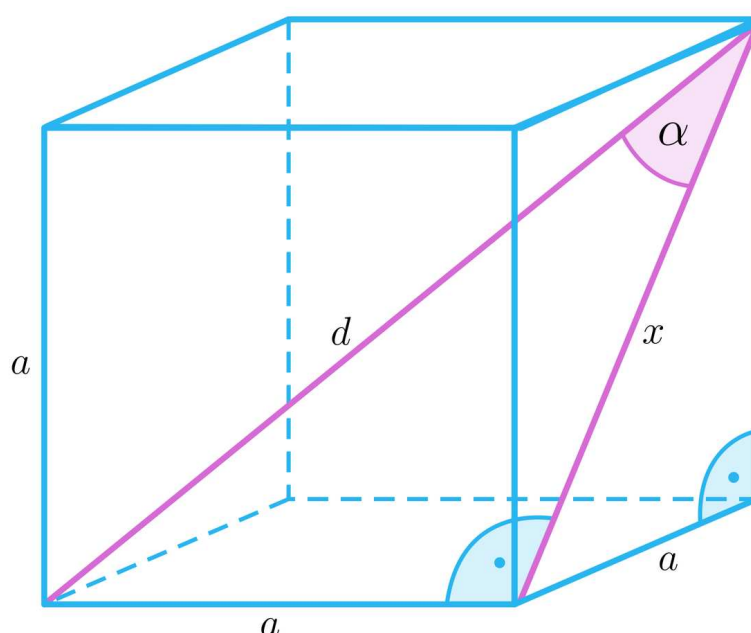
Zauważmy, że mogliśmy wykorzystać definicję funkcji sinus lub cosinus, ponieważ wyznaczyliśmy długość przeciwprostokątnej w tym trójkącie.

Przykład 5

Wyznamy przybliżoną wartość kąta zawartego pomiędzy przekątną sześcianu a przekątną jego ściany bocznej.

Rozwiązanie:

Narysujmy sześcian i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.

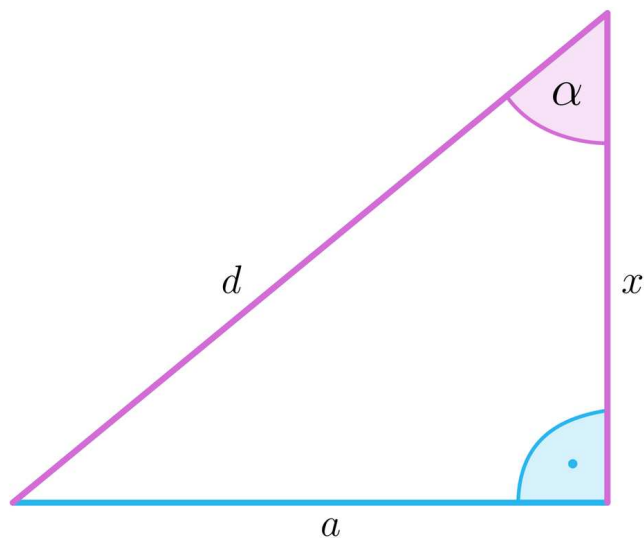


Długość przekątnej ściany bocznej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + a^2 = x^2.$$

Wobec tego $x = a\sqrt{2}$.

Zauważmy, że przekątna sześcianu, przekątna ściany bocznej oraz krawędź podstawy tworzą trójkąt prostokątny, jak na poniższym rysunku.



Zatem, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznej tangens dla kąta α , mamy zależność:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$, zatem $\alpha = 35^\circ$.

Słownik

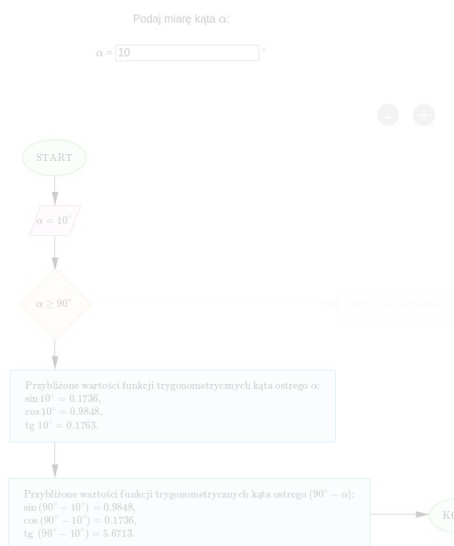
funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

funkcje wyrażające stosunki pomiędzy długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym, a następnie wykonaj poniższe polecenie. Co zauważasz?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DGxEJYRnn>

Polecenie 2

Korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wstaw w puste miejsca przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych dla podanych kątów:

$$\begin{aligned}\sin 33^\circ &\approx \boxed{} \\ \cos 27^\circ &\approx \boxed{} \\ \operatorname{tg} 29^\circ &\approx \boxed{} \\ \cos 70^\circ &\approx \boxed{} \\ \operatorname{tg} 16^\circ &\approx \boxed{} \\ \sin 13^\circ &\approx \boxed{} \\ \cos 29^\circ &\approx \boxed{} \\ \operatorname{tg} 56^\circ &\approx \boxed{}\end{aligned}$$

0,225

0,5543

0,3420

1,4826

0,5446

0,8746

0,891

0,2867

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm obliczający przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych zadanego kąta ostrego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to:

☐ $\alpha \in \langle 30^\circ, 60^\circ \rangle$.

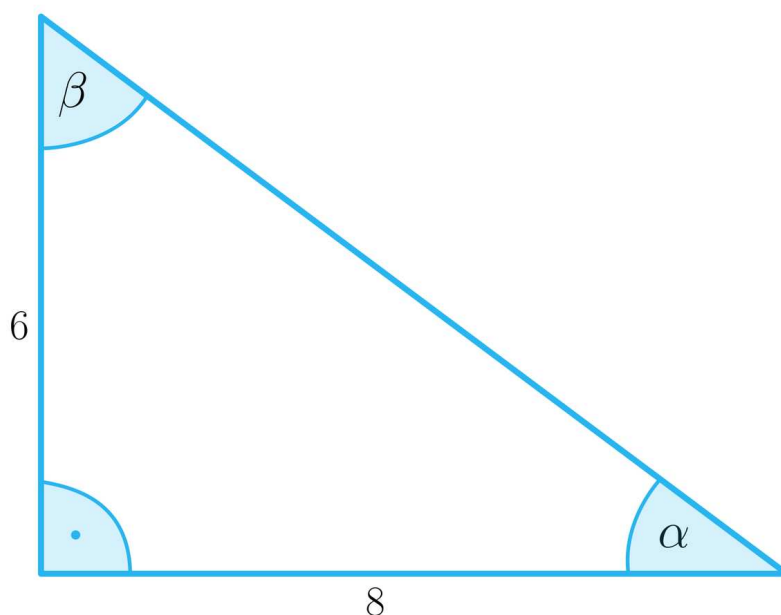
☐ $\alpha \in \langle 60^\circ, 90^\circ \rangle$

☐ $\alpha \in \langle 0^\circ, 30^\circ \rangle$

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z rysunkiem, a następnie na jego podstawie wykonaj ćwiczenie.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Przybliżona miara kąta α wynosi 37° .
- ☐ Suma tangensów kątów ostrych w przybliżeniu do części dziesiątych wynosi 0,5.
- ☐ Wartość wyrażenia $\sin \alpha + \sin \beta$ wynosi 1,4.
- ☐ Przybliżona miara kąta β wynosi 54° .

Ćwiczenie 3



Połącz w pary wartość funkcji trygonometrycznej z przybliżoną wartością kąta α .

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha \approx 19^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha \approx 62^\circ$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$$

$$\alpha \approx 35^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3$$

$$\alpha \approx 72^\circ$$

Ćwiczenie 4



Uporządkuj wartości wyrażeń w kolejności malejącej:

$$\frac{\sin 20^\circ + \cos 48^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}$$



$$\sin 79^\circ - \cos 11^\circ$$



$$\frac{\cos 18^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{\sin 20^\circ}$$



$$3 \sin 28^\circ$$



Ćwiczenie 5



Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wstaw w odpowiednie miejsca przybliżone wartości:

$$\sin 14^\circ = \boxed{}$$

$$\cos 79^\circ = \boxed{}$$

$$\operatorname{tg} 62^\circ = \boxed{}$$

$$\sin 15^\circ = \boxed{}$$

$$\cos 78^\circ = \boxed{}$$

1, 8807

0, 2588

0, 2079

0, 2419

0, 1908

Ćwiczenie 6



Wiedząc o tym, że tangens kąta nachylenia prostej do osi X układu współrzędnych jest równy współczynnikowi kierunkowemu prostej, wpisz przybliżone wartości kątów nachylenia podanych prostych do osi odciętych.

Jeżeli prosta jest określona równaniem $y = 0,6x + 1$, to kąt nachylenia tej prostej do osi odciętych wynosi stopni.

Jeżeli prosta jest określona równaniem $y = \frac{2}{7}x - 3$, to kąt nachylenia tej prostej do osi odciętych wynosi stopni.

Jeżeli prosta jest określona równaniem $y = 2x + 3$, to kąt nachylenia tej prostej do osi odciętych wynosi stopnie.

Ćwiczenie 7



W trójkącie prostokątnym ABC długość boku AC wynosi 8, a miara kąta ABC wynosi 58° . Wyznacz długości boków i miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Ćwiczenie 8



Wyznacz przybliżoną wartość kąta pomiędzy przekątną sześcianu a płaszczyzną jego podstawy.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic matematycznych lub przy użyciu kalkulatora;
- oblicza różne wielkości z wykorzystaniem przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych;
- wyznacza miary kątów w trójkącie prostokątnym;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie prezentują pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych”).

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie wykorzystania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.