Dowodzenie twierdzeń związanych z potęgowaniem

Dowodzenie twierdzeń związanych z potęgowaniem

Źródło: 10741031 z Pixabay, domena publiczna.

W tej lekcji szczególną uwagę zwrócimy na dowodzenie własności liczb, ale naszym głównym celem będzie zastosowanie własności potęg. Zasygnalizujemy też inne ważne zagadnienia, np. wzory skróconego mnożenia. W przykładach i zadaniach najważniejsze będzie rozumowanie (często nieschematyczne) i argumentowanie przytaczanych faktów i obserwacji.

Twoje cele

- Udowodnisz, że dana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
- Udowodnisz podzielność jednej liczby przez inną.
- Udowodnisz nierówność między potęgami.

Przeczytaj

Często popełnianym błędem (również w życiu codziennym) jest mylenie przyczyny ze skutkiem, czyli mówiąc językiem matematyki: odwracanie wynikania.

Jako przykład rozważmy zdania: „jeśli wschodzi słońce, to kogut pieje” oraz „jeśli kogut pieje, to słońce wschodzi”. Osoby mieszkające w sąsiedztwie kogutów zauważyły zapewne, że codziennie około wschodu słońca te ptaki dają o sobie znać głośnym “kukuryku”. Pierwsze zdanie możemy empirycznie uznać za prawdziwe. Trudno jednak oczekiwać, że za każdym razem, kiedy kogut zapieje, wzejdzie jakieś słońce… Oba zdania są przykładem implikacji (wynikania). Jeśli pierwsze z nich nazwiemy implikacją prostą (twierdzeniem prostym), to drugie będzie implikacją odwrotną (twierdzeniem odwrotnym). W tym przypadku implikacja prosta jest prawdziwa, ale implikacja odwrotna już nie.

W matematyce jest podobnie. Implikacja „jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 4, to jest podzielna przez 2” jest prawdziwa, ale implikacja do niej odwrotna („jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 2, to jest podzielna przez 4”) prawdziwa już nie jest (liczba 6 jest podzielna przez 2, ale nie dzieli się przez 4).

W tej lekcji skupimy się na dowodzeniu faktów wykorzystując własności potęg. Przeanalizuj poniższe przykłady. Zwróć szczególną uwagę, co jest założeniem a co tezą w każdym przypadku.

Przykład 1

Wykażemy, że liczba $8^{10}+4^{16}+3\cdot 16^8$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie

Aby wykazać, że podana liczba dzieli się przez 17, wystarczy przedstawić ją w postaci iloczynu liczby 17 i liczby całkowitej. Przekształcimy podane wyrażenie korzystając z własności działań na potęgach. Ponieważ każda z liczb 8, 4 i 16 jest potęgą liczby 2, zachodzą następujące równości:

$$8^{10}+4^{16}+3\cdot 16^8=$$

$$=\left(2^3\right)^{10}+\left(2^2\right)^{16}+3\cdot\left(2^4\right)^8=$$

$$=2^{3\cdot 10}+2^{2\cdot 16}+3\cdot 2^{4\cdot 8}=$$

$$=2^{30}+2^{32}+3\cdot 2^{32}=$$

$$=2^{30}+2^{30}\cdot 2^2+3\cdot 2^{30}\cdot 2^2=$$

$= 2^{30}\left(1 + 2^2 + 3 \cdot 2^2\right) = 2^{30} \cdot 17.$

Ponieważ 2^{30} jest liczbą naturalną, więc $2^{30} \cdot 17$ jest podzielna przez 17.

Przykład 2

Wykażemy, że $63^{16} < 18^{24}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z umiejętności porównywania potęg o takich samych wykładnikach.

I sposób

Zauważmy, że $63^{16} < 64^{16} = \left(4^3\right)^{16} = 4^{3 \cdot 16} = 4^{48} = 4^{2 \cdot 24} = \left(4^2\right)^{24} = 16^{24} < 18^{24}$.

II sposób

Zauważmy, że $63^{16} = 63^{2 \cdot 8} = \left(63^2\right)^8 = 3969^8$ oraz $18^{24} = 18^{3 \cdot 8} = \left(18^3\right)^8 = 5832^8$.

Ponieważ $3969^8 < 5832^8$, więc nierówność $63^{16} < 18^{24}$ jest prawdziwa.

Przykład 3

Uzasadnimy, że nie istnieje liczba całkowita x, która spełnia równanie
$x(x+1) = 2021^{2020}$.

Rozwiązanie

Założenie: $x \in \mathbb{Z}$.

Teza: równanie $x(x+1) = 2021^{2020}$ nie ma rozwiązania.

Zauważmy, że dla liczby całkowitej x wyrażenie $x(x+1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc jedna z nich jest parzysta, zatem iloczyn dzieli się przez 2.

Liczba 2021 jest nieparzysta, więc liczba 2021^{2020} również jest nieparzysta. Ponieważ nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, więc wyrażenie $x(x+1)$ nie równa się 2021^{2020} dla żadnej liczby całkowitej x.

Przykład 4

Wykażemy, że liczba $2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1} + 9$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Rozwiązanie

Założenie: $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

Teza: $2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1} + 9$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Przekształćmy rozważane wyrażenie:

$2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1} + 9 =$

$= 2^{2n} - 2 \cdot 3 \cdot 2^n + 9 =$

$= 2^n \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n + 9 =$

$= 2^n(2^n - 3) - 3(2^n - 3) =$

$= (2^n - 3)(2^n - 3) =$

$= (2^n - 3)^2$.

Ponieważ n jest liczbą całkowitą dodatnią, więc 2^n jest liczbą naturalną, zaś liczba $2^n - 3$ jest całkowita.

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $3^{n-5} + 3^{n-4} + 3^{n-3}$ jest podzielna przez 13 dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 4.

Rozwiązanie

Założenie: $n \in \mathbb{N}, n > 4$.

Teza: $13 \mid 3^{n-5} + 3^{n-4} + 3^{n-3}$.

Zauważmy, że

$3^{n-5} + 3^{n-4} + 3^{n-3} =$

$= 3^{n-5} + 3^{n-5} \cdot 3 + 3^{n-5} \cdot 3^2 =$

$= 3^{n-5}\left(1 + 3 + 3^2\right) =$

$= 3^{n-5} \cdot 13$.

Ponieważ n jest większe od 4, więc liczba 3^{n-5} jest naturalna, co oznacza, że jej iloczyn przez liczbę 13 jest wielokrotnością liczby 13, co dowodzi tezy.

Przykład 6

Wykażemy, że liczba $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 6 dla dowolnej liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Założenie: $n \in \mathbb{N}$.

Teza: $6 \mid 3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2}$.

Przekształćmy rozważaną sumę:

$3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} =$

$= 3^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} =$

$= 3^n \cdot 3^3 + 3^n \cdot 3 + 2^{n+1} \cdot 2 + 2^{n+1} \cdot 2^2 =$

$= 3^n\left(3^3 + 3\right) + 2^{n+1}\left(2 + 2^2\right) =$

$= 3^n \cdot 30 + 2^{n+1} \cdot 6 =$

$= 6\left(3^n \cdot 5 + 2^{n+1}\right)$.

Ponieważ liczby 3^n i 2^{n+1} są naturalne oraz iloczyn i suma liczb naturalnych są liczbami naturalnymi, więc liczba $3^n \cdot 5 + 2^{n+1}$ też jest naturalna. Zatem rozważana liczba jest podzielna przez 6, co kończy dowód.

Przykład 7

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwy jest wzór $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Rozwiązanie

Założenie: $a, b \in \mathbb{R}$.

Teza: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Na mocy definicji potęgowania możemy zauważyć, że

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$.

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, otrzymujemy

$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$.

Wystarczy wykonać redukcję wyrazów podobnych, aby otrzymać prawą stronę dowodzonej tożsamości

$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Przykład 8

Wykażemy, że jeśli $9^x + 9^{-x} = 14$ dla pewnej liczby rzeczywistej x, to $3^x + 3^{-x} = 4$.

Rozwiązanie

Założenie: $9^x + 9^{-x} = 14$.

Teza: $3^x + 3^{-x} = 4$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie $\left(3^x + 3^{-x}\right)^2$ korzystając ze wzoru udowodnionego w poprzednim przykładzie:

$\left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = \left(3^x\right)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + \left(3^{-x}\right)^2 = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+(-x)} + 3^{-2x} =$

$= 3^{2x} + 2 \cdot 3^0 + 3^{-2x} = 9^x + 2 + 9^{-x}$.

Zatem

$\left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 9^x + 2 + 9^{-x}$.

Z założenia wiemy, że $9^x + 9^{-x} = 14$, zatem

$\left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 2 + 14$

$\left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 16$.

Powyższe równanie oznacza, że $3^x + 3^{-x} = 4$ lub $3^x + 3^{-x} = -4$. Zauważmy ponadto, że dowolna potęga liczby dodatniej jest dodatnia, więc liczba 3^x i liczba 3^{-x} są dodatnie, więc i liczba $3^x + 3^{-x}$ jest dodatnia. Stąd $3^x + 3^{-x} = 4$.

Słownik

implikacja

zdanie logiczne powstałe przez połączenie dwóch zdań p i q spójnikiem implikacji, czyli $p \Rightarrow q$, co czytamy „jeśli p, to q”. Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, zaś zdanie q - następnikiem

implikacja odwrotna do danej

implikacja, która powstaje z implikacji danej poprzez zamienienie jej poprzednika i następnika miejscami (poprzednik implikacji prostej staje się następnikiem implikacji odwrotnej, zaś następnik implikacji prostej staje się poprzednikiem implikacji odwrotnej). Implikacją odwrotną do $p \Rightarrow q$ jest $q \Rightarrow p$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zawarte w animacji. Na ich podstawie rozwiąż polecenia zamieszczone poniżej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DH2gVk5Tk

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dowodzenia twierdzeń związanych z potęgowaniem.

Polecenie 2

Udowodnij, że liczba $6^{17} - 6^{18} + 6^{19}$ jest podzielna przez 31.

Polecenie 3

Ile dzielników ma liczba $6^{17} - 6^{18} + 6^{19}$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wykaż, że liczba $9^7 + 3^{13} + 5 \cdot 27^4$ jest podzielna przez 17.

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej większej niż 1 liczba $3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n + 5^n + 5^{n+2}$ jest podzielna przez 13.

Ćwiczenie 9

Wiadomo, że $4^x + 4^{-x} = 2$. Wykaż, że $2^x + 2^{-x} = 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dowodzenie twierdzeń związanych z potęgowaniem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dowodzi, że dana liczba jest kwadratem liczby całkowitej,
- dowodzi podzielności jednej liczby przez inną,
- dowodzi nierówność między potęgami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Dowodzenie twierdzeń związanych z potęgowaniem" oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj". Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6‑8 z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja" i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- Działania na potęgach

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Dowodzenie twierdzeń związanych z potęgowaniem”.