Zastosowanie trygonometrii w obliczaniu pól figur - przykłady

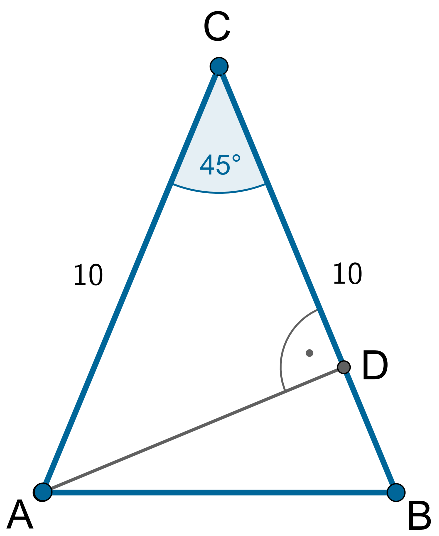
Obliczanie długości boków w trójkącie. Obliczanie pola powierzchni równoległoboku. Obliczanie pola czworokąta.

Zastosowanie trygonometrii w obliczaniu pól figur - przykłady

W poniższych przykładach pokażemy zastosowania trygonometrii do opisu związków miarowych w figurach płaskich.

Przykład 1

W trójkącie równoramiennym ABC każde z ramion AC i BC ma długość równą 10. Miara kąta ACB jest równa 45°. Obliczymy pole tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że wysokość AD, opuszczona na bok CB, odcina trójkąt prostokątny ADC. Ponieważ kąt ACD ma miarę 45°, to

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \sin 45^\circ.$$

Wobec tego

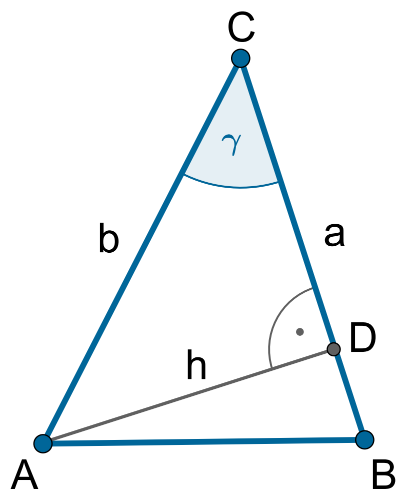
$$|AD| = |AC| \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

i pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.$$

Przykład 2

Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC, w którym dane są długości boków $|AC| = b$, $|BC| = a$ oraz miara γ kąta ACB.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że wysokość AD, opuszczona na bok BC, odcina trójkąt prostokątny, w którym

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \sin\gamma,$$

Przyjmując $h = |AD|$, otrzymujemy

$$\frac{h}{b} = \sin\gamma,$$

skąd

$$h = b\sin\gamma.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h,$$

zatem

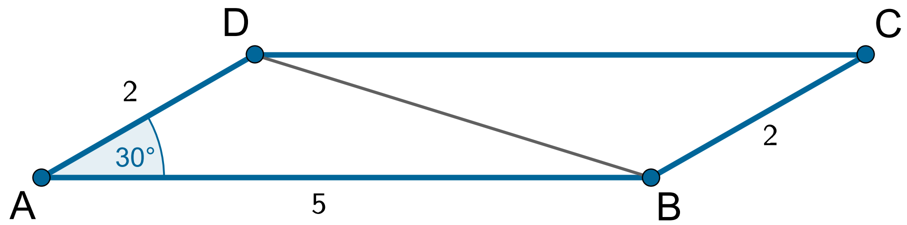
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Wobec tego pole trójkąta ostrokątnego możemy wyrazić za pomocą danych długości dwóch boków i sinusa kąta między nimi.

Przykład 3

W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków $|AB| = 5$ i $|BC| = 2$. Kąt DAB ma miarę 30°. Obliczymy pole tego równoległoboku.

Zauważmy, że przekątna DB dzieli dany równoległobok na dwa trójkąty przystające ADB i CBD.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

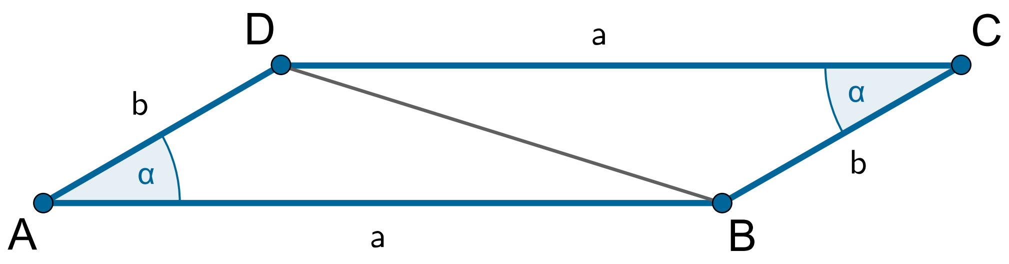
Ponieważ pole trójkąta ABD jest równe

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

to pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 5.

Przykład 4

Rozpatrzmy równoległobok $ABCD$, w którym długości boków AB i AD są równe odpowiednio a oraz b. Kąt ostry między tymi bokami ma miarę α.
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zauważmy, że przekątna DB dzieli dany równoległobok na dwa trójkąty przystające ADB i BCD.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ pole trójkąta ABD jest równe

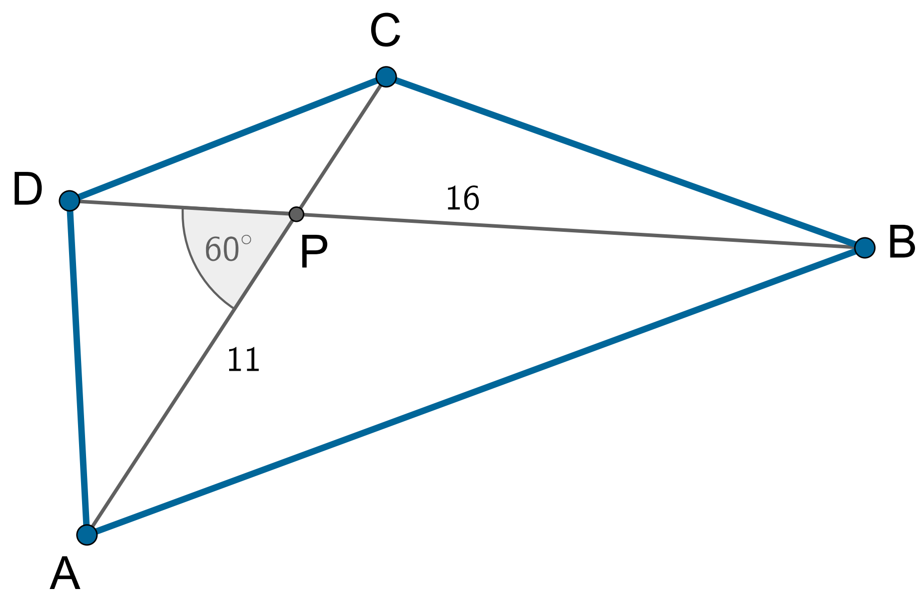
$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha,$$

to pole równoległoboku $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin\alpha = ab \sin\alpha.$$

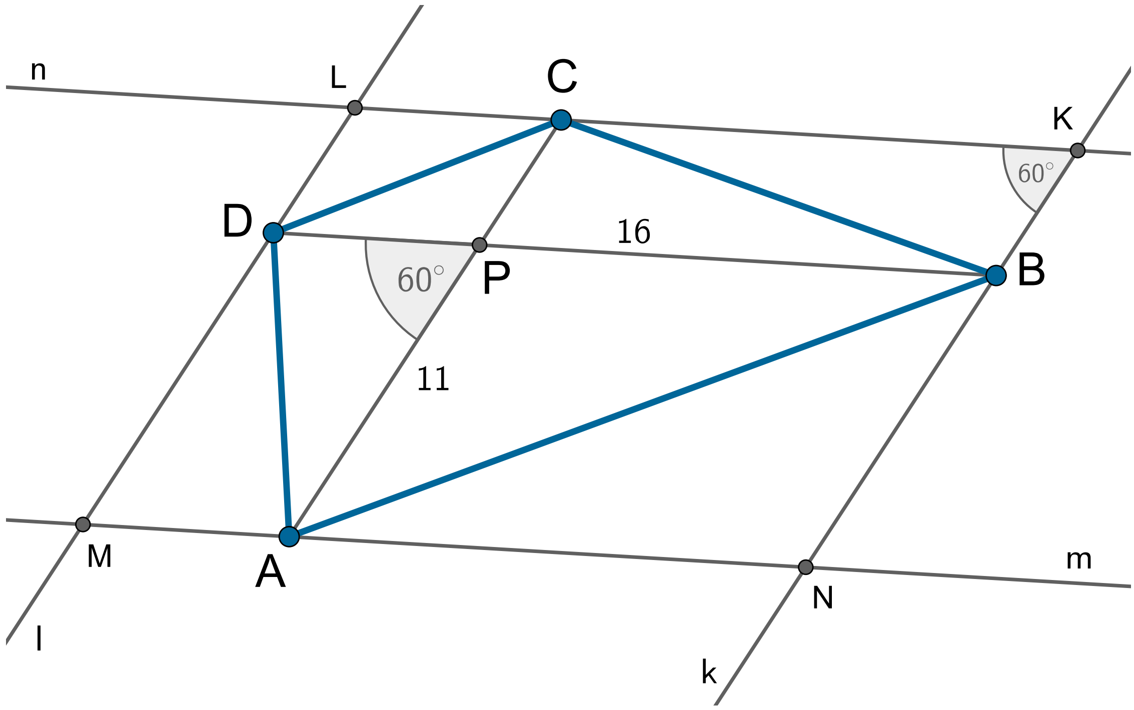
Przykład 5

W czworokącie $ABCD$ przekątne długości $|AC| = 11$ oraz $|BD| = 16$ przecinają się w punkcie P pod kątem 60°. Obliczymy pole tego czworokąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Poprowadźmy przez wierzchołki czworokąta $ABCD$ cztery proste k, l, m, n równoległe odpowiednio do przekątnych tego czworokąta. Punkty przecięcia tych prostych oznaczmy K, L, M, N.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Wobec tego $|NK| = 11$ i $|KL| = 16$ oraz kąt NKL ma miarę 60°. A zatem pole czworokąta $KLMN$ jest równe

$$P_{KLMN} = |NK| \cdot |KL| \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 88\sqrt{3}.$$

Każdy z czworokątów $APDM$, $BPAN$, $CPBK$ i $DPCL$ jest równoległobokiem, w którym jedna z przekątnych jest bokiem czworokąta $ABCD$.
Każda przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające. Pola tych trójkątów są równe

$$P_{APD} = P_{AMD}, P_{BPA} = P_{BNA}, P_{CPB} = P_{CKB}, P_{DPC} = P_{DLC}.$$

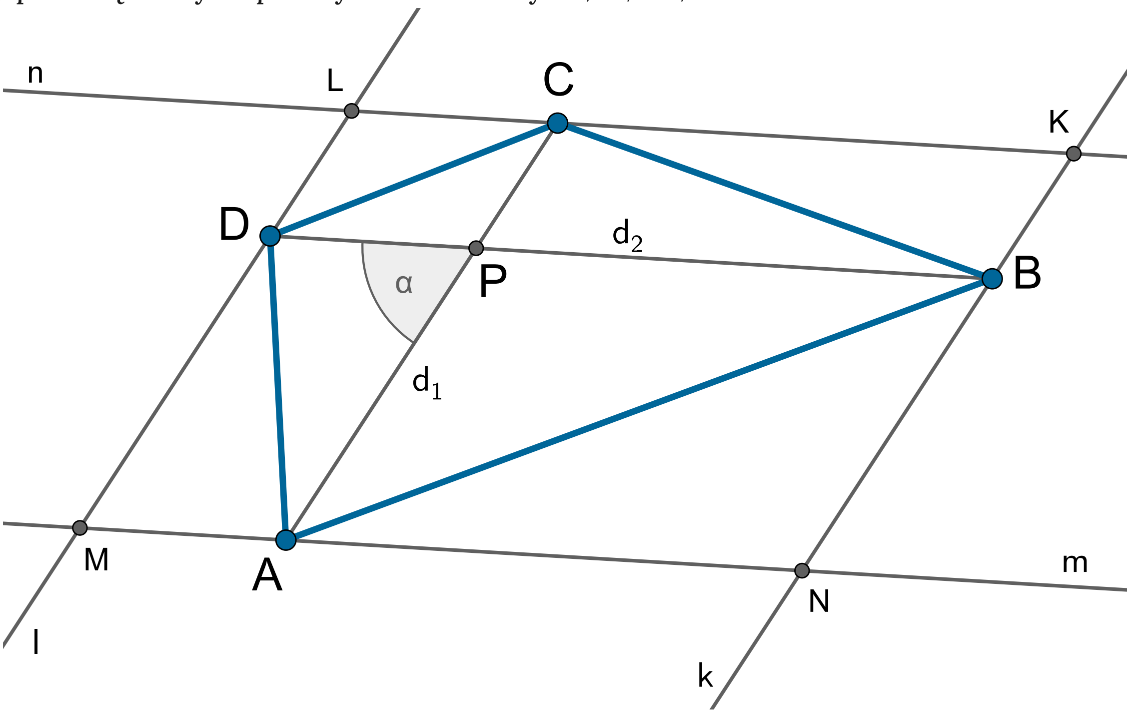
Ponadto pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów APD, BPA, CPB i DPC. To znaczy, że pole równoległoboku $KLMN$ jest dwa razy większe od pola czworokąta $ABCD$. Zatem

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot 88\sqrt{3} = 44\sqrt{3}.$$

Przykład 6

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$, w którym długości przekątnych AC i BD są równe odpowiednio d_1 oraz d_2, a kąt ostry między nimi ma miarę α.
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, poprowadźmy przez wierzchołki czworokąta

cztery proste k, l, m, n równoległe odpowiednio do przekątnych tego czworokąta. Punkty przecięcia tych prostych oznaczmy K, L, M, N.



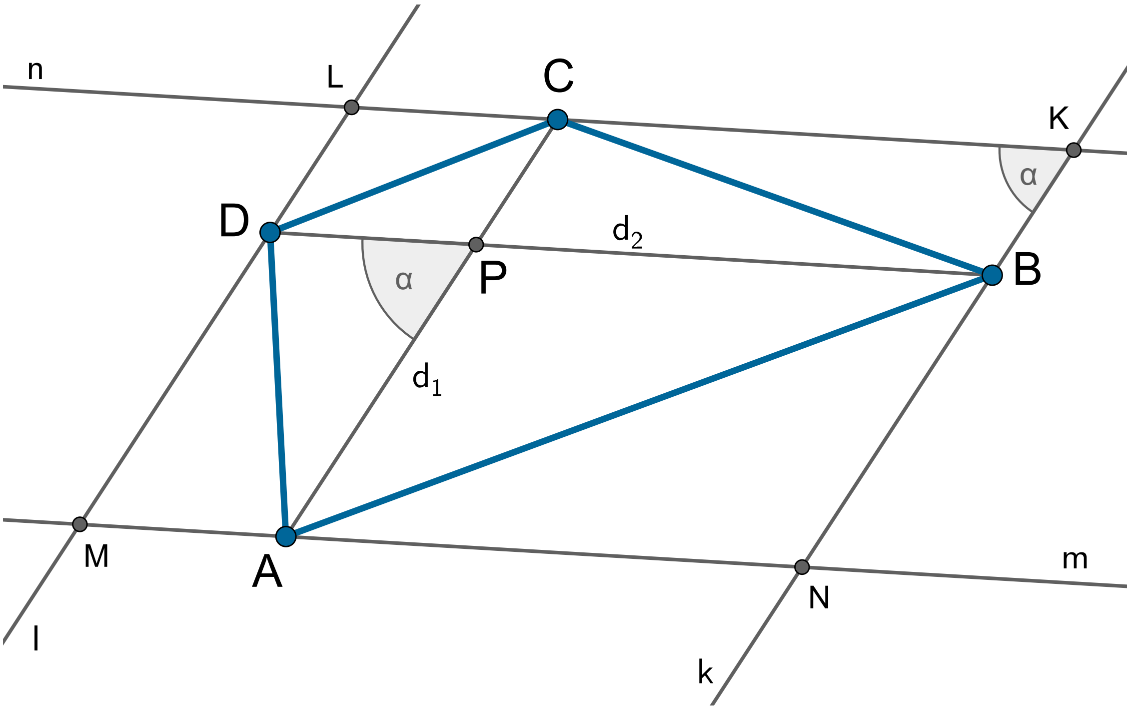
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Wobec tego $|NK| = d_1$ i $|KL| = d_2$ oraz kąt NKL ma miarę α. Pole $KLMN$ jest równe

$$P_{KLMN} = |NK| \cdot |KL| \cdot \sin\alpha = d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha.$$

Każdy z czworokątów $APDM$, $BPAN$, $CPBK$ i $DPCL$ jest równoległobokiem, w którym jedna z przekątnych jest bokiem czworokąta $ABCD$.
Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające. Pola tych trójkątów są równe

$$P_{APD} = P_{AMD}, P_{BPA} = P_{BNA}, P_{CPB} = P_{CKB}, P_{DPC} = P_{DLC}.$$



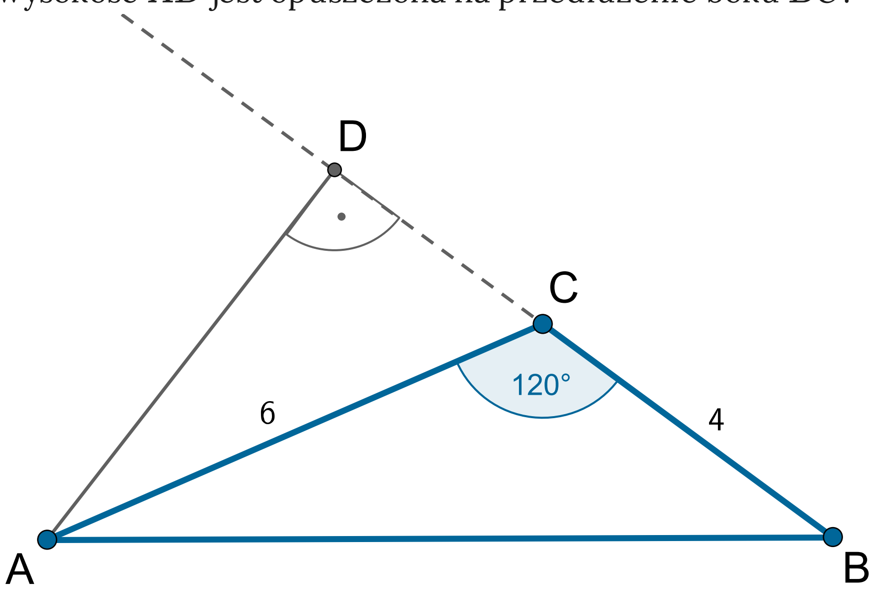
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponadto pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów APD, BPA, CPB i DPC. To znaczy, że pole równoległoboku $KLMN$ jest dwa razy większe od pola czworokąta $ABCD$, skąd

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{KLMN} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

Przykład 7

W trójkącie ABC boki AC i BC mają długości $|AC| = 6$ i $|BC| = 4$, a kąt między tymi bokami ma miarę 120°. Obliczymy pole tego trójkąta.
Zauważmy, że wysokość AD jest opuszczona na przedłużenie boku BC.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie prostokątnym ADC kąt przy wierzchołku C ma miarę 60°. Wówczas

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \sin 60^\circ,$$

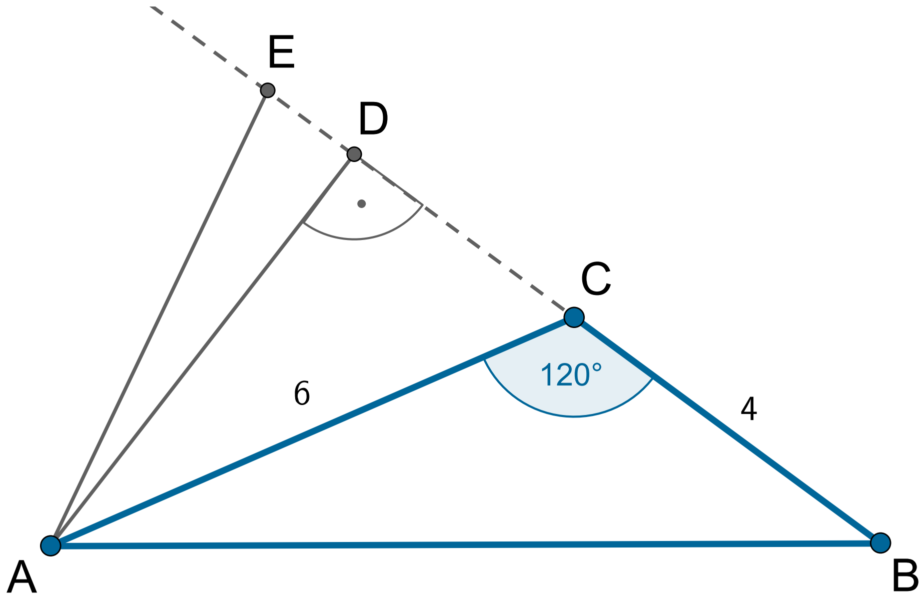
skąd

$$|AD| = |AC| \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Pole P trójkąta ABC jest więc równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Wybierzmy dodatkowo na półprostej BC taki punkt E, że $|EC| = |BC|$. Wówczas trójkąty BAC oraz EAC mają równe boki BC i EC oraz wspólną wysokość AD, opuszczoną z wierzchołka A.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pola tych trójkątów są więc równe, co znaczy, że pole trójkąta ABC można wyrazić za pomocą danych długości boków i sinusa kąta przyległego do kąta rozwartego zawartego między tymi bokami

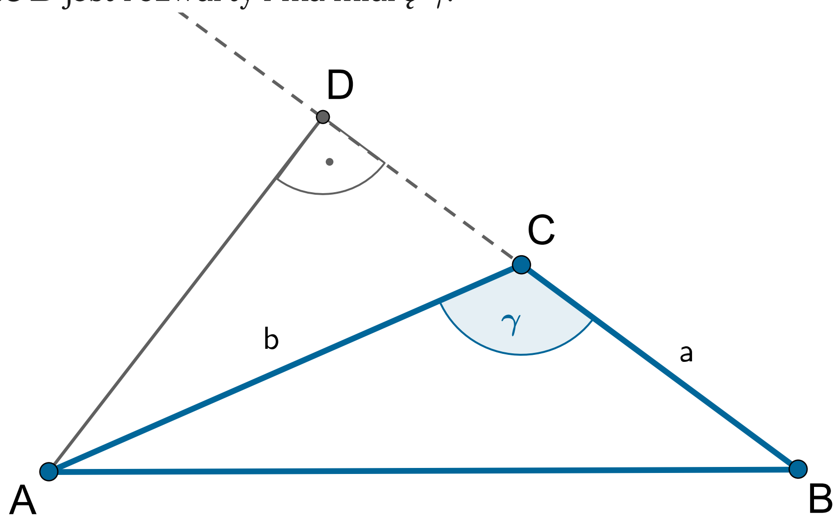
$$P_{ABC} = P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |CA| \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CA| \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

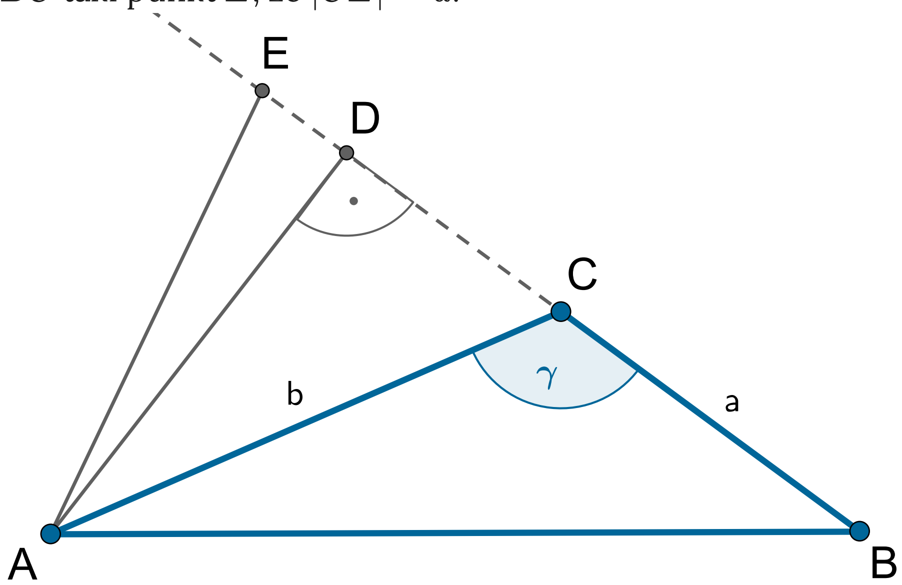
Przykład 8

Rozpatrzmy trójkąt rozwartokątny ABC, w którym dane są długości boków $|CB| = a$ i $|AC| = b$. Kąt ACB jest rozwarty i ma miarę γ.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Niech AD będzie wysokością trójkąta ABC, przy czym punkt D niech leży na przedłużeniu boku BC. Postępując podobnie jak w poprzednim przykładzie, wybierzmy na półprostej BC taki punkt E, że $|CE| = a$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wówczas trójkąty ABC i AEC mają równe pola, czyli

$$P_{ABC} = P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |CA| \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \gamma).$$

Ponadto $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin(\gamma)$, więc powyższy wzór zachodzi także dla sinusa kąta rozwartego.