Przekroje kuli

Źródło: manseok Kim z Pixabay, domena publiczna.

Zdarzyło ci się na pewno niejednokrotnie przecinać pomarańczę lub grapefruita, żeby się z kimś podzielić. Nie zawsze udawało się zrobić to w sposób dokładny, ale jeśli udało się to zrobić jednym cięciem, to w przekroju owocu zobaczyłeś koło. Czy przecinając kulisty owoc jednym cięciem, wzdłuż jednej płaszczyzny możemy otrzymać inny przekrój?

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

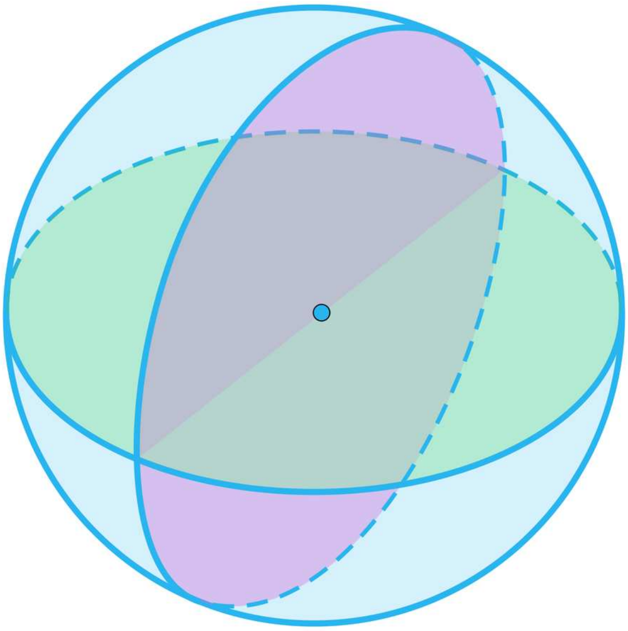
- Rozpoznasz przekrój i przekrój osiowy kuli.
- Podasz zależność pomiędzy promieniem kuli, promieniem przekroju i odległością pomiędzy ich środkami.
- Obliczysz promień i pole przekroju kuli o danych własnościach.
- Przeanalizujesz własności przekrojów równoległych i prostopadłych w kuli.
- Obliczysz pole powierzchni i objętość odcinka kuli.

Przeczytaj

Przekrojem bryły nazywamy figurę, która jest częścią wspólną bryły i płaszczyzny, która ją przecina.

Przekrojem osiowym bryły obrotowej nazywamy przekrój, który przechodzi przez oś obrotu.

Przekrojem osiowym kuli jest **koło wielkie** – koło, którego promień jest równy promieniowi kuli. Przekroje zaznaczone w kuli poniżej są przekrojami osiowymi kuli.



Przykład 1

Obliczymy pole przekroju zawierającego środek kuli o polu powierzchni 36π.

Rozwiązanie:

Ponieważ jest to przekrój zawierający środek kuli, to jest to koło wielkie. Zauważmy, że pole całkowite kuli wyraża się wzorem $P_c = 4\pi R^2$, a pole koła wielkiego $P = \pi R^2$. To oznacza, że pole koła wielkiego jest czterokrotnie mniejsze od pola całkowitego kuli. A zatem $P = \frac{1}{4} \cdot 36\pi = 9\pi$.

Wniosek

Pole przekroju osiowego kuli jest czterokrotnie mniejsze od pola powierzchni kuli.

Przykład 2

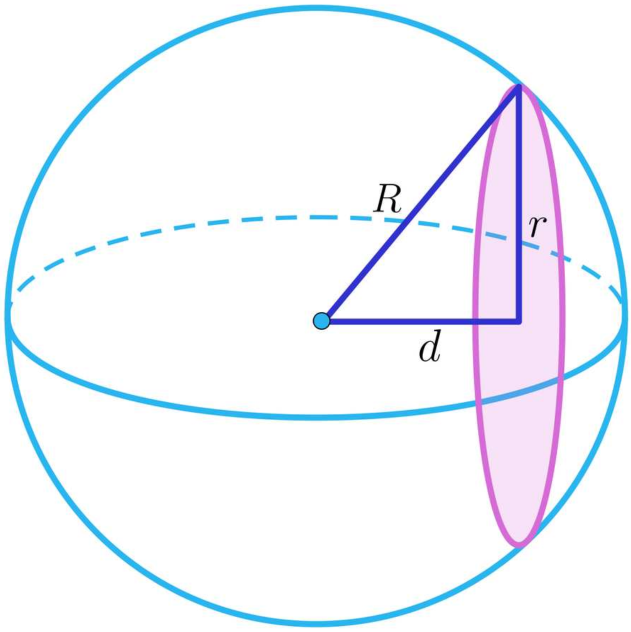
Pole przekroju osiowego kuli wynosi 32π. Obliczymy objętość tej kuli.

Rozwiązanie:

Obliczmy promień kuli. Korzystając z pola przekroju osiowego mamy $\pi R^2 = 32\pi$, a stąd $R = 4\sqrt{2}$.

Obliczamy objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^3 = \frac{512}{3}\sqrt{2}\pi$.

Jeżeli przetniemy kulę o promieniu R płaszczyzną znajdującą się w pewnej odległości (różnej od 0) od środka, to otrzymany przekrój również jest kołem. Koło to jest mniejsze od koła wielkiego kuli, a jego odległość od środka d spełnia nierówność $0 < d < R$.



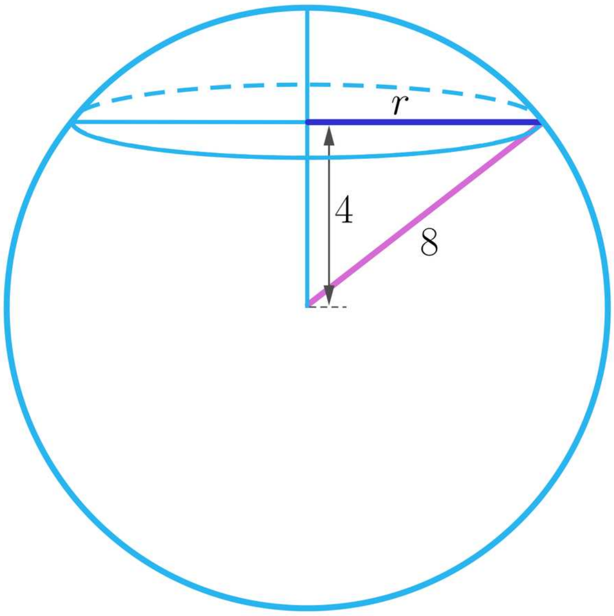
Trójkąt, którego bokami są: R – promień kuli, r – promień przekroju, d – odległość przekroju od środka jest trójkątem prostokątnym tzn.

$$r^2 + d^2 = R^2$$

Przykład 3

Obliczymy pole przekroju osiowego kuli o promieniu 8 cm, którego odległość od środka wynosi 4 cm.

Rozwiązanie:



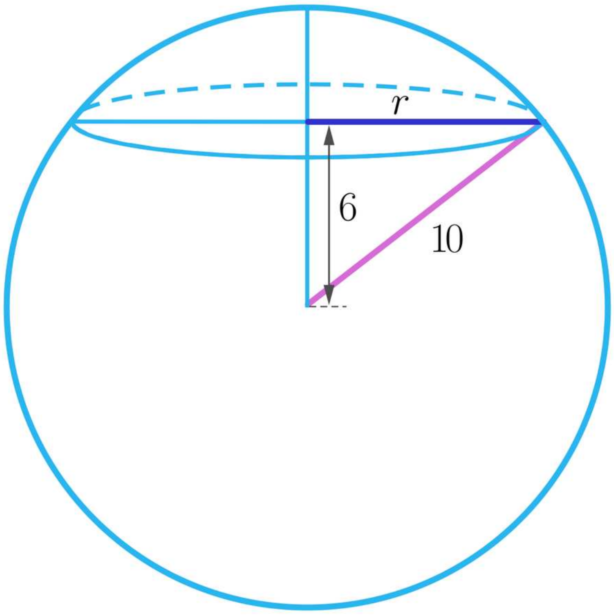
Obliczamy promień przekroju z twierdzenia Pitagorasa: $4^2 + r^2 = 8^2$. A zatem $r^2 = 48$. Stąd $r = 4\sqrt{3}$ cm. A zatem pole przekroju wynosi $P = \pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi$ cm^2.

Przykład 4

Kulę o promieniu 10 przecięto dwiema płaszczyznami równoległymi, tak, że jeden z przekrojów ma promień dwukrotnie dłuższy od drugiego. Obliczymy odległość między tymi przekrojami, jeżeli jeden z nich znajduje się w odległości 6 od środka.

Rozwiązanie:

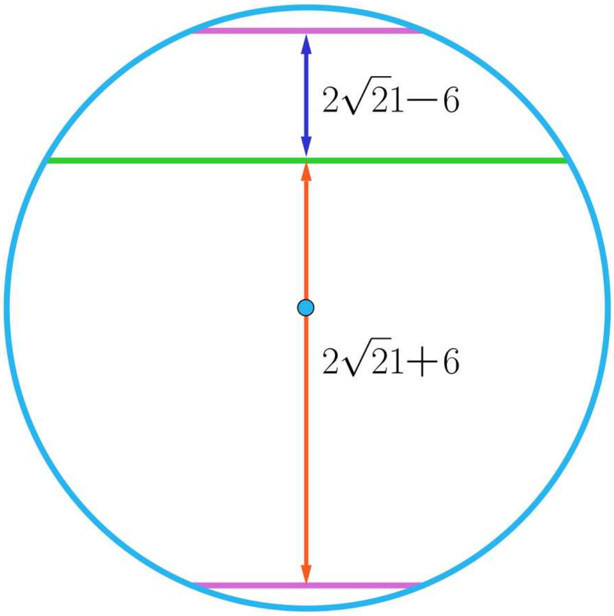
Obliczamy długość promienia pierwszego z przekrojów z twierdzenia Pitagorasa:



$6^2 + r^2 = 10^2$. A zatem $r = 8$.

Ponieważ długość promienia przekroju wynosi 8, to drugi przekrój musi być mniejszy. Mamy więc $r_2 = 4$. Obliczamy odległość tego przekroju od środka z twierdzenia Pitagorasa: $d^2 + 4^2 = 10^2$. Czyli $d = 2\sqrt{21}$.

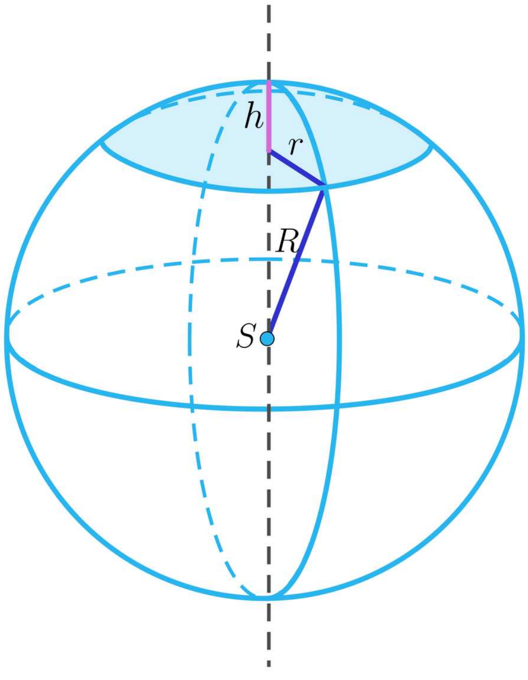
Mamy dwie możliwości położenia tego przekroju:



A zatem odległość pomiędzy tymi przekrojami wynosi $2\sqrt{21} - 6$ lub $2\sqrt{21} + 6$.

Dla zainteresowanych

Przekrój kuli dzieli ją na dwie części, które nazywamy odcinkami kuli.



Objętość odcinka kuli policzymy ze wzoru:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

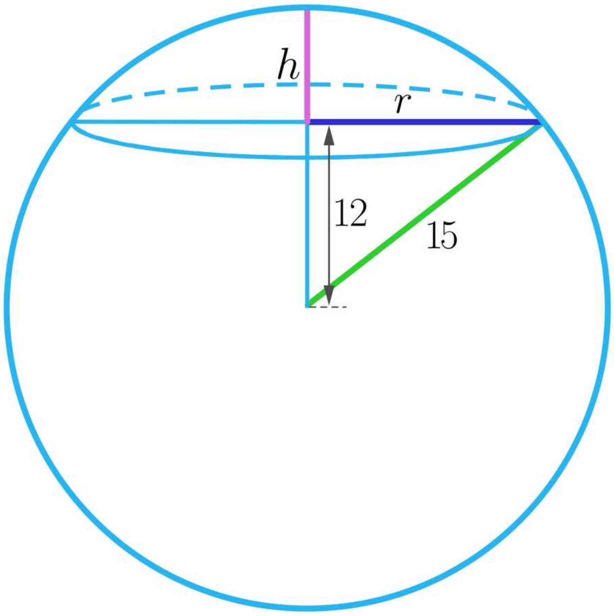
Pole powierzchni odcinka kuli policzymy ze wzoru

$$P_c = 2\pi Rh + \pi r^2$$

Przykład 5

Oblicz objętość i pole powierzchni mniejszego odcinka kuli powstałego przez przekrój kuli o promieniu 15 cm oddalonym o 12 cm od środka.

Rozwiązanie:



Mamy, że $h = 15 - 12 = 3$ cm. Obliczamy promień przekroju z twierdzenia Pitagorasa: $r^2 + 12^2 = 15^2$. A stąd $r = 9$ cm.

Mamy więc $V = \frac{\pi \cdot 3^2}{3}(45 - 3) = 126\pi \text{ cm}^3$ oraz $P_c = 2\pi \cdot 15 \cdot 3 + \pi \cdot 9^2 = 171\pi \text{ cm}^2$.

Słownik

przekrój bryły

część wspólna bryły i płaszczyzny, która ją przecina
przekrój osiowy

przekrój zawierający oś obrotu bryły obrotowej
odległość przekroju od środka

długość najkrótszego odcinka łączącego środek kuli i przekrój

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Ustaw taki przekrój, w którym $r = 6$. Ile wynosi wówczas odległość pomiędzy środkami? Sprawdź swoje obliczenia w symulacji interaktywnej.

Polecenie 2

Ile będzie wynosić odległość między środkami równoległych przekrojów tej kuli o promieniach 6 i 8?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Pole przekroju kuli, którego odległość od środka kuli jest równa 4 wynosi 64π. Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli.

Ćwiczenie 8

Wspólna cięciwa dwóch przystających prostopadłych przekrojów kuli o promieniu 8 ma długość 4. Oblicz sumę pól tych przekrojów.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekrój kuli

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X Stereometria, poziom podstawowy

Uczeń:

1)rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje przekrój i przekrój osiowy kuli,
- podaje zależność pomiędzy promieniem kuli, promieniem przekroju i odległością pomiędzy ich środkami,
- oblicza promień i pole przekroju kuli o danych własnościach,
- analizuje własności przekrojów równoległych i prostopadłych w kuli,
- oblicza pole powierzchni i objętość odcinka kuli.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody pracy:

- dyskusja,
- ćwiczeniowa.

Formy pracy:

- praca całą klasą,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- modele brył,
- materiały zawarte w e-podręczniku.

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prowadzi z uczniami dyskusję na temat przekrojów brył, w szczególności przyglądając się przekrojom kuli, formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie formułują wniosek dotyczący przekrojów kuli.
3. Nauczyciel prezentuje uczniom symulację interaktywną pokazującą zależności pomiędzy promieniem kuli, a promieniem przekroju.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie rozwiązują samodzielnie polecenia do symulacji interaktywnej, a następnie wymieniają się rozwiązaniami z kolegą z ławki i dokonują oceny koleżeńskiej.
2. Uczniowie rozwiązują samodzielnie ćwiczenia z sekcji Przeczytaj.
3. Nauczyciel wraz z uczniami analizuje rozwiązania uczniowskie.
4. Wybrani uczniowie rozwiązują na tablicy zadania, które sprawiały najwięcej problemów (w szczególności wskazane jest, aby szczegółowo omówić zadania 7 i 8).

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie dokonują samooceny i podsumowują wiadomości dotyczące przekrojów kul.

Praca domowa:

Poćwiczyć w domu obliczanie długości promienia kuli, promienia przekroju i odległości pomiędzy ich środkami.

Materiały pomocnicze:

Kula i sfera

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną uczniowie mogą wykorzystać w domu do utrwalenia wiadomości. Można ją też wykorzystać przy wprowadzaniu pojęcia przekroju.