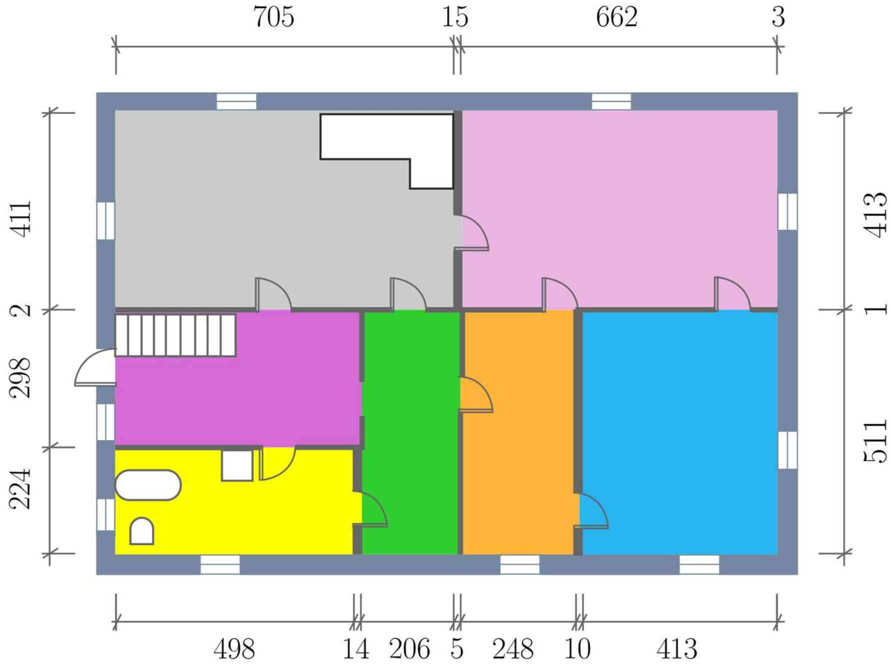
Pole prostokąta

Pole prostokąta

Źródło: Sharon McCutcheron, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Na rysunku przedstawiony jest typowy plan mieszkania, w którym pokoje mają kształt prostokątny. Na brzegach rysunku podane są długości boków prostokątów z rysunku. Na postawie takiego planu możemy policzyć powierzchnię każdego pomieszczenia i całego mieszkania. Możemy na podstawie planu wyznaczyć ile płytek kupić do wyłożenia podłogi w łazience, ile zakupić desek na podłogę w salonie itp. Można też określić ile farby potrzebujemy na pomalowanie ścian, pod warunkiem, że znamy wysokość mieszkania, bo przecież ściany, okna i drzwi są też prostokątami.



W tym materiale przedstawimy metody wyznaczania pól prostokątów.

Twoje cele

- Poznasz i udowodnisz wzór na pole prostokąta o danych długościach boków.
- Zobaczysz, że informacja o długości przekątnej nie wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia prostokąta.
- Poznasz i udowodnisz wzór na pole prostokąta o danej długości przekątnej i danym kącie między przekątnym.
- Zastosujesz wzory na pole prostokąta w zastosowaniach praktycznych i zadaniach matematycznych.

Przeczytaj

Na początek zajmiemy się problemem mierzenia. Przy mierzeniu różnych wielkości fizycznych stosuje się jednostkę tej wielkości. Przy mierzeniu pola stosuje się jako jednostkę podstawową metr kwadratowy, a dla ułatwienia wykorzystuje się inne jednostki kwadratowe: centymetr kwadratowy, ar, kilometr kwadratowy lub ogólnie kwadrat o boku 1 j, gdzie j jest jednostką długości.

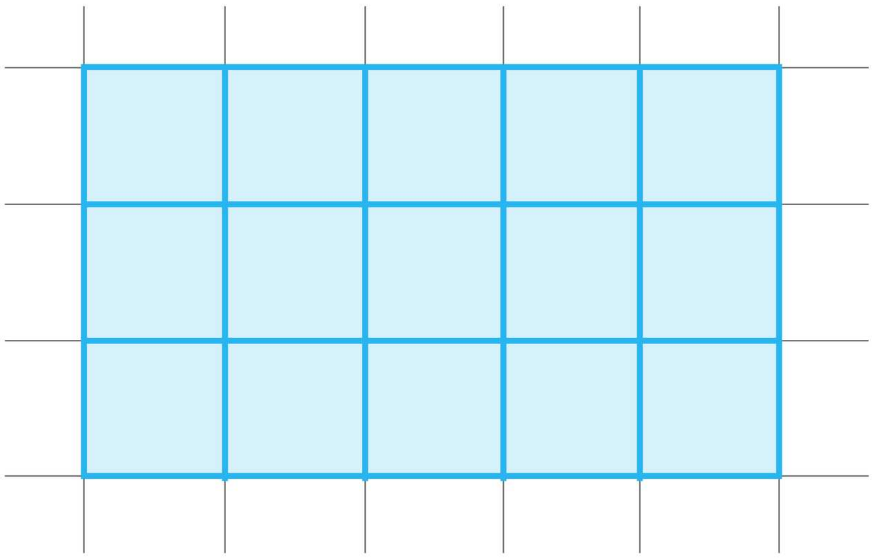
Na opakowaniu puszki z farbą stosuje się pojęcie wydajności tzn., ile farby zużywa się na metr kwadratowy powierzchni, panele podłogowe kupuje się w metrach kwadratowych itp.

Gdybyśmy nie znali wzoru na pole prostokąta to musielibyśmy przykładać wzorzec w postaci kwadratu o bokach $1 \text{ j } \times 1 \text{ j}$ do mierzonej powierzchni i policzyć. Jest to dość łatwe do zastosowania w przypadku prostokątów o bokach całkowitych.

Przykład 1

Stosując powyższą metodę wyznaczymy pole prostokąta o bokach 3 i 5.

Rozwiązanie



Na rysunku widzimy, że powstały trzy warstwy po 5 jednostek kwadratowych w warstwie lub równoważnie pięć warstw po 3 jednostki kwadratowe.

Stąd pole prostokąta jest równe $3 \cdot 5 = 15$ jednostek kwadratowych.

Dowody dotyczące pola figur opierają się na następujących własnościach pola:

Własność: pola

Niech P_F oznacza pole figury F. Wtedy:

1. figury przystające mają równe pola;
2. jeżeli figura F_1 jest zawarta w figurze F_2 to $P_{F_1} \leq P_{F_2}$;
3. jeżeli F_1, F_2 są rozłączne, to pole ich sumy jest równe sumie pól. Prawdziwa jest też ogólniejsza własność, że pole sumy figur jest równe sumie ich pól odjąć pole ich części wspólnej.

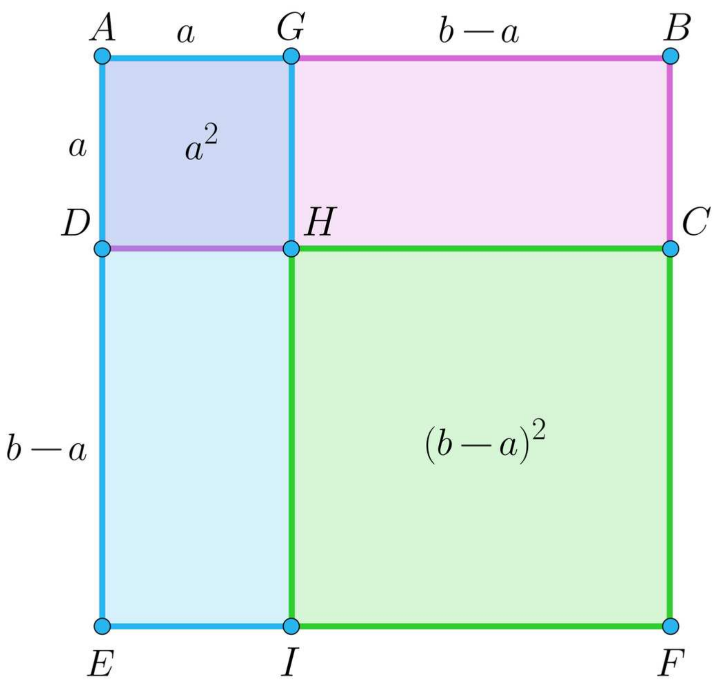
Aby wyprowadzić uniwersalny wzór na obliczanie pola prostokąta przyjmujemy, że znamy wzór na pole kwadratu $P = a^2$, gdzie a jest bokiem kwadratu.

Twierdzenie: wzór na pole prostokąta, gdy znane są długości boków

Pole prostokąta o bokach a, b jest równe $P = ab$.

Dowód

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a < b$. Popatrzmy na rysunek. Chcemy wyznaczyć pole prostokąta $ABCD$.



Budujemy kwadrat o boku b, a w nim zaznaczamy prostokąt $AEIG$ o bokach a, b. Wtedy pole kwadratu składa się z kwadratu o polu $(b-a)^2$, dwóch prostokątów o polu P, które mają część wspólną o polu a^2.

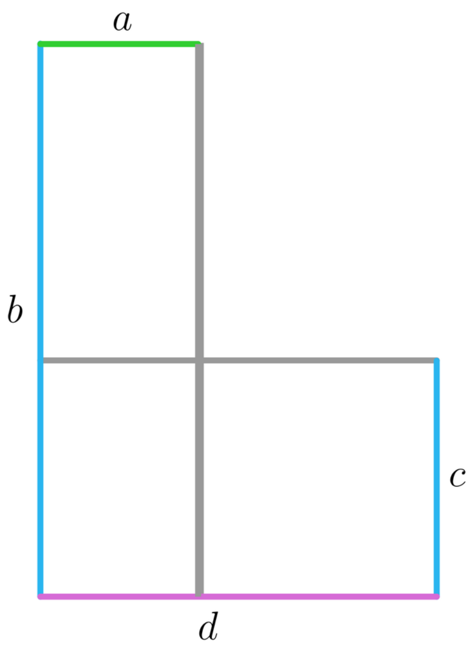
Wtedy $b^2 = (b-a)^2 + 2P - a^2$,

$$2P = b^2 - (b-a)^2 + a^2 = b^2 - b^2 + 2ab - a^2 + a^2 = 2ab.$$

Stąd $P = ab$.

Przykład 2

Obliczymy pole figury przedstawionej na rysunku.



Rozwiązanie

$$P = ab + dc - ac$$

Przykład 3

Prostokąty F_1 o bokach a_1, b_1 i F_2 o bokach a_2, b_2 są podobne w skali k. Wyznaczymy pole prostokąta F_2 w zależności od pola prostokąta F_1.

Rozwiązanie

$$P_{F_2} = a_2 \cdot b_2 = ka_1 \cdot kb_1 = k^2 \cdot P_{F_1}$$

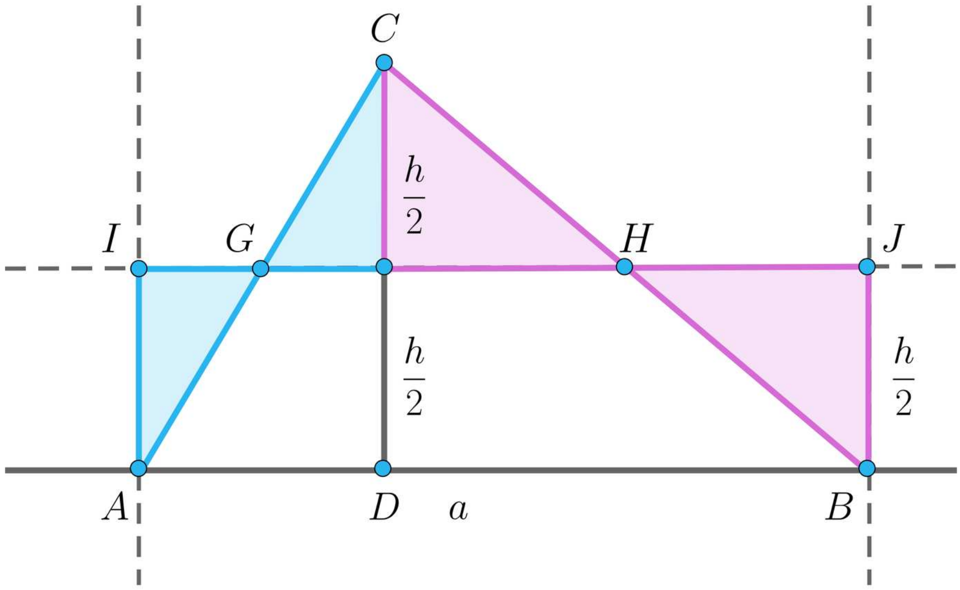
Warto zauważyć, że pokazana w powyższym przykładzie zależność jest ogólną własnością pól figur podobnych.

Przykład 4

Korzystając z wzoru na pole prostokąta wyznaczymy wzór na pole trójkąta.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny trójkąt ABC i poprowadźmy wysokość h oraz linię łączącą środki dwóch boków jak na rysunku.

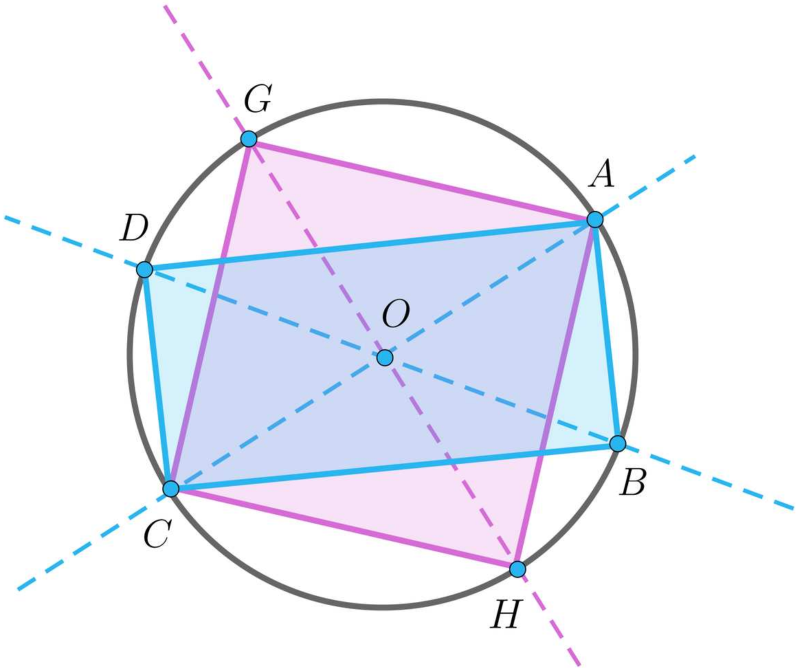


Linia ta jest równoległa do boku AB trójkąta i dzieli wysokość trójkąta na połowy.
Z wierzchołków A i B prowadzimy proste prostopadłe do podstawy, które przecinają się z linią środkową w punktach I, J tak, że czworokąt $ABJI$ jest prostokątem o bokach długości a i $\frac{h}{2}$.

Wtedy trójkąty **niebieskie** są przystające, podobnie trójkąty **czerwone** są przystające. Stąd pole trójkąta ABC jest równe polu prostokąta $ABJI$, czyli $P = \frac{ah}{2}$.

Teraz odpowiemy na pytanie czy znając długość przekątnej można wyliczyć pole prostokąta.

Wpierw załóżmy, że przekątne prostokąta mają równą długość d, i dzielą się w połowie. Wtedy wierzchołki prostokąta będą leżały na okręgu o promieniu $\frac{d}{2}$ jak na rysunku.



Prostokąt $ABCD$ i kwadrat $AHCG$ mają równe przekątne. To świadczy o tym, że istnieją różne prostokąty mające równe przekątne.

Ponadto, prostokąt $ABCD$ i kwadrat $AHCG$ maja różne pola.

Aby to pokazać, zauważmy, że w trójkącie ACG (którego pole jest równe połowie pola kwadratu) podstawą jest średnica okręgu d a wysokością jest promień okręgu $\frac{d}{2}$.

Natomiast w trójkącie ADC (którego pole jest równe połowie pola prostokąta) podstawą jest średnica okręgu d a długością wysokości jest odległość punktu D od średnicy okręgu. Z własności okręgu odległość ta jest mniejsza od promienia i stąd pole prostokąta jest mniejsze od pola kwadratu.

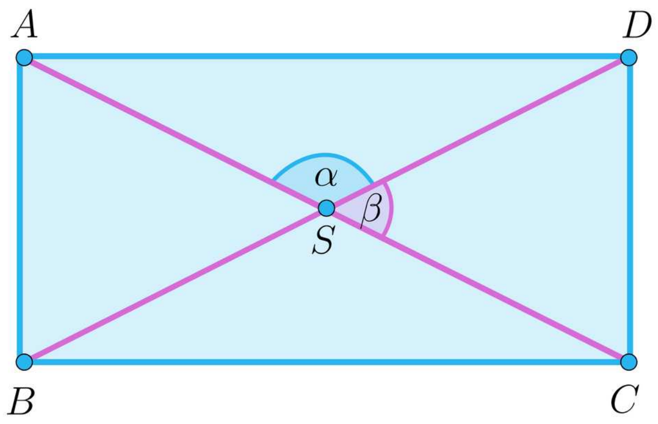
Powyższe obserwacje wskazują na to, że aby wykorzystać przekątną do wyznaczenia pola prostokąta należy dodać jeszcze jakiś warunek.

Twierdzenie: wzór na pole prostokąta, gdy znana jest długość przekątnej i kąt między przekątnymi

Pole prostokąta jest równe $P = \frac{d^2 \sin \alpha}{2}$, gdzie d jest długością przekątnej a α jest jednym z kątów między przekątnymi prostokąta.

Dowód

Na rysunku przedstawiony jest prostokąt z zaznaczonymi kątami między przekątnymi.



Zastosujemy:

1. Fakt, że pole trójkąta jest równe $\frac{ab\sin\alpha}{2}$, gdzie a, b są bokami trójkąta a α kątem między tymi bokami.
2. Fakt, że $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

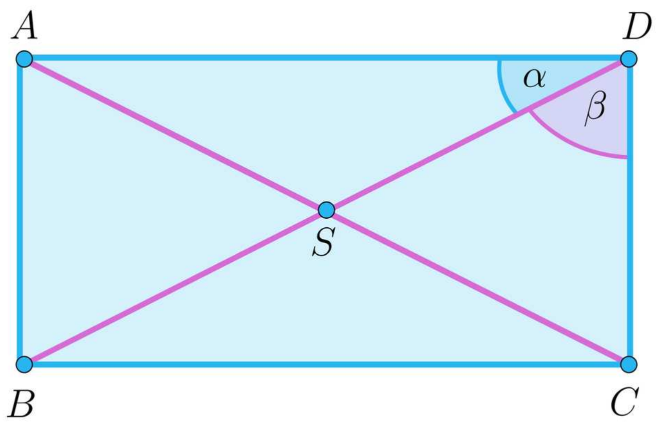
Pole prostokąta jest równe:

$$P = 2P_{ASD} + 2P_{ASB} = \frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\sin\alpha + \frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\sin\beta = \frac{d^2}{4}(\sin\alpha + \sin(180^\circ - \alpha)) =$$

$$= \frac{d^2\sin\alpha}{2}$$

Przykład 5

Wyznaczymy pole prostokąta, którego przekątna ma długość 20, a kąt między przekątną i jednym z jego boków jest równy 30°.



Rozwiązanie

Załóżmy, że $\alpha = 30^\circ$.

Wtedy kąt DSA jest równy $180^\circ - 2\alpha = 120^\circ$ i stąd $P = \frac{20^2\sin 120^\circ}{2} = 100\sqrt{3}$.

> Gdyby $\beta = 30^\circ$. To wtedy kąt CSD jest równy $180^\circ - 2\beta = 120^\circ$.
>
> Wynika stąd, że do rozwiązania zadania wystarczy informacja o mierze jednego kąta niezależnie czy to jest α czy β.

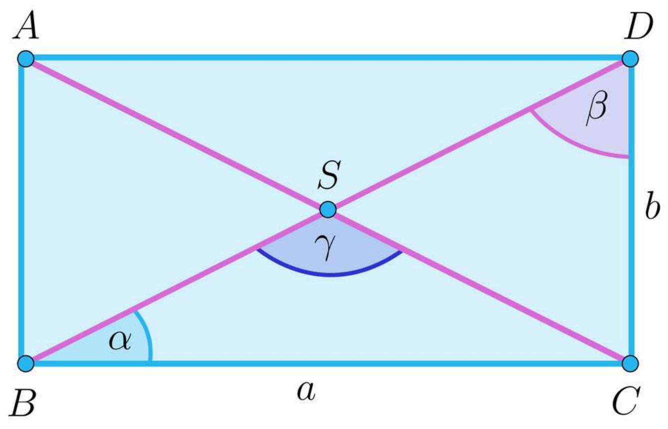
Kolejny przykład pokazuje, że informacja o długości przekątnej i zależności między bokami również pozwala na wyznaczenie pola prostokąta.

> **Przykład 6**
>
> Długość jednego z boków prostokąta jest dwa razy większa od długości drugiego boku prostokąta. Przekątna prostokąta ma długość równą 3. Obliczymy pole tego prostokąta.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Z warunków zadania wynika, że jeśli jeden bok ma długość a, to drugi ma długość $2a$.
>
> Wtedy $P = a \cdot 2a = 2a^2$. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. $a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = 9$. Stąd $a^2 = \frac{9}{5}$. Zatem $P = \frac{18}{5}$.

> **Przykład 7**
>
> Obwód prostokąta jest równy 14, a jego pole jest równe 12. Obliczymy długości boków tego prostokąta.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Oznaczmy boki trójkąta symbolami a i b. Obwód jest równy $2a + 2b = 14$. Pole jest równe $ab = 12$.
>
> Trzeba rozwiązać układ równań.
>
> $\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases}$
>
> $a = 7 - b$
>
> $(7 - b)b = 12$
>
> $-b^2 + 7b - 12 = 0$
>
> $\Delta = 49 - 48 = 1$
>
> $b_1 = \frac{-7-1}{-2} = 4$, $b_2 = \frac{-7+1}{-2} = 3$
>
> Zatem jeden z boków ma długość 3 a drugi - długość 4.

> **Przykład 8**

Załóżmy, że w prostokącie podany jest kąt α jaki tworzy przekątna prostokąta z bokiem a oraz długość tego boku. Wyznaczymy pole tego prostokąta, długość drugiego boku, długość przekątnej i kąt między przekątnymi.



Rozwiązanie

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, więc $b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Stąd $P = ab = a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

$\cos \alpha = \frac{a}{d}$, więc $d = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Kąt γ na rysunku wynosi $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ a drugi kąt między przekątnymi wynosi $180^\circ - \gamma = 2\alpha$.

Przykład 9

Wyznaczymy zależności między długościami boków prostokąta a, b i długością przekątnej d.

Rozwiązanie

Z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = d^2$. Stąd

$a = \sqrt{d^2 - b^2}$, $b = \sqrt{d^2 - a^2}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Słownik

prostokąt

czworokąt, który ma wszystkie kąty proste

kwadrat

prostokąt, który ma wszystkie boki równe

Schemat interaktywny

Polecenie 1

W schemacie interaktywnym są pola do wpisania długości boków, długości przekątnej oraz miary kąta między przekątną i bokiem prostokąta. Możesz wpisać wartości w wybrane dwa pola na ekranie. Wtedy wyliczone zostaną wartości pozostałych parametrów oraz kąty między przekątnymi, pole i obwód prostokąta.

1. Jeżeli wybierzesz bok i kąt między przekątną i bokiem, to w obliczeniach kąt ten będzie traktowany jak kąt między przekątną i wybranym bokiem.

2. Jeżeli wybierzesz przekątną i kąt między przekątną i bokiem, to boki prostokąta zostaną wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do kolejności.

3. Jeżeli wybierzesz dwa boki, to zostaną wyliczone dwa kąty między przekątną i bokiem.

4. Pamiętaj, że przekątna musi być dłuższa od obu boków oraz że kąt musi być większy od zera i mniejszy od kąta prostego.

5. Zwróć uwagę, że wyniki mogą być podane w przybliżeniu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DxXQ9voix

Ćwiczenie 1

Rozwiąż test. Zaznacz poprawną odpowiedź.

Polecenie 2

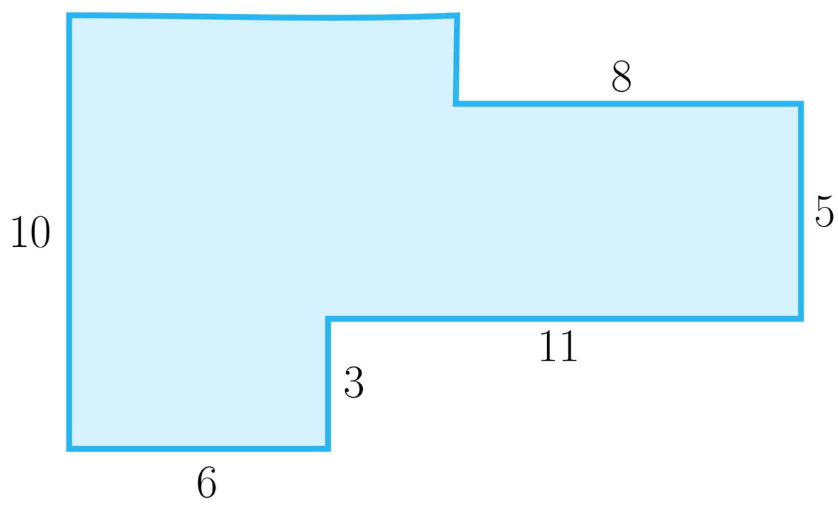
Zbuduj algorytm obliczający parametry prostokąta, zawierający pola do wpisania długości boków, długości przekątnej oraz miary kąta między przekątną i bokiem prostokąta. Powienin mieć możliwość wyboru dwóch parametrów. Z podanych parametrów wyliczone zostaną wartości pozostałych parametrów oraz kąty między przekątnymi, pole i obwód prostokąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

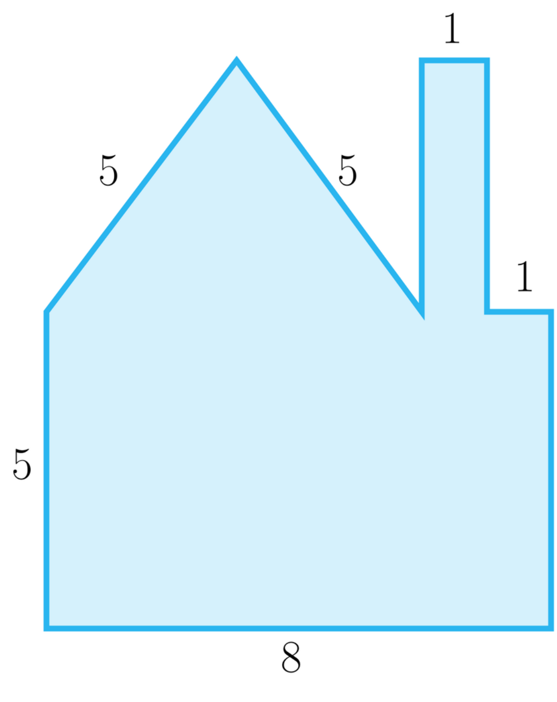
Ćwiczenie 1

Pole niebieskiego obszaru na rysunku jest równe:



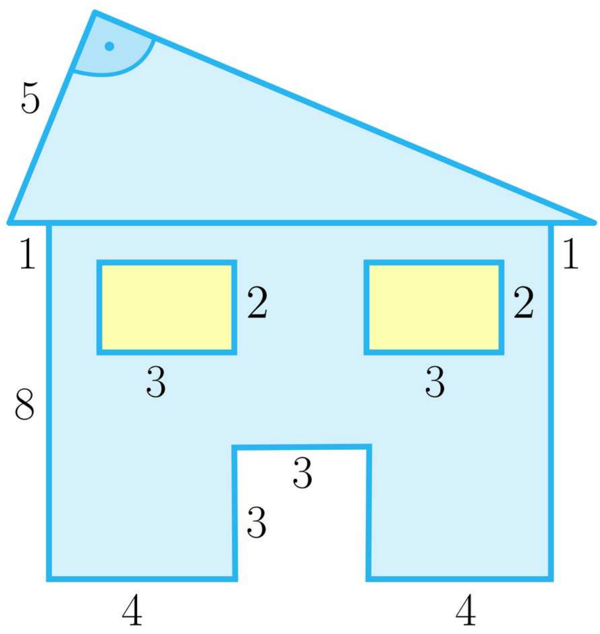
Ćwiczenie 2

Pole niebieskiego obszaru na rysunku jest równe:



Ćwiczenie 3

Pole niebieskiego obszaru na rysunku jest równe:



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Obwód prostokąta jest równy 10, długość jego przekątnej $\sqrt{13}$. Oblicz pole tego prostokąta.

Ćwiczenie 7

Jeżeli każdy z boków prostokąta zwiększymy o 2 cm to pole zwiększy się o 20 cm^2. Oblicz o ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli każdy z boków zwiększymy o 3 cm.

Ćwiczenie 8

Na działce o powierzchni 6 arów stoi dom zbudowany na planie prostokąta o wymiarach $12 \text{ m} \times 15 \text{ m}$. Jaką część działki zajmuje ten dom?

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole prostokąta

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje prostokąty;

- zna wzory na pole prostokąta, również z wykorzystaniem sinusa kąta między bokiem i przekątną i kąta między przekątnymi;
- wykorzystuje własności pola prostokąta w rozwiązywaniu zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka;
- interaktywna aplikacja;
- burza mózgu.

Formy zajęć:

- praca indywidualna;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przeprowadza pogadankę na temat mierzenia pól.
2. Nauczyciel przedstawia temat lekcji i wspólnie z uczniami określa kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie przy pomocy burzy mózgu przypominają definicje i przykłady czworokątów wklęsłych i wypukłych. Następnie formułują cechy, które je różnią.
2. Nauczyciel prezentuje wyprowadzenie wzoru na pole prostokąta $P = ab$.
3. Uczniowie rozważają problem, czy długość przekątnej wystarczy do wyznaczenia pola prostokąta.
4. Nauczyciel wyprowadza wzór na pole prostokąta, gdy znana jest długość przekątnej i kąt między przekątnymi.
5. Uczniowie analizują przykłady pokazujące jak wyznaczyć pole prostokąta na podstawie informacji o długości przekątnej i zależności między bokami.
6. Uczniowie utrwalają wiadomości korzystając ze schematu interaktywnego.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę rozwiązując ćwiczenia w sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel podsumowuje zajęcia zwracając na moce i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują plan swojego mieszkania i wyznaczają pole powierzchni co najmniej dwóch pokoi.

Materiały pomocnicze:

Pole figury

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać schemat interaktywny na lekcji o polach czworokątów.
- Uczniowie mogą przed lekcją wykorzystać schemat do przygotowania się do zajęć.