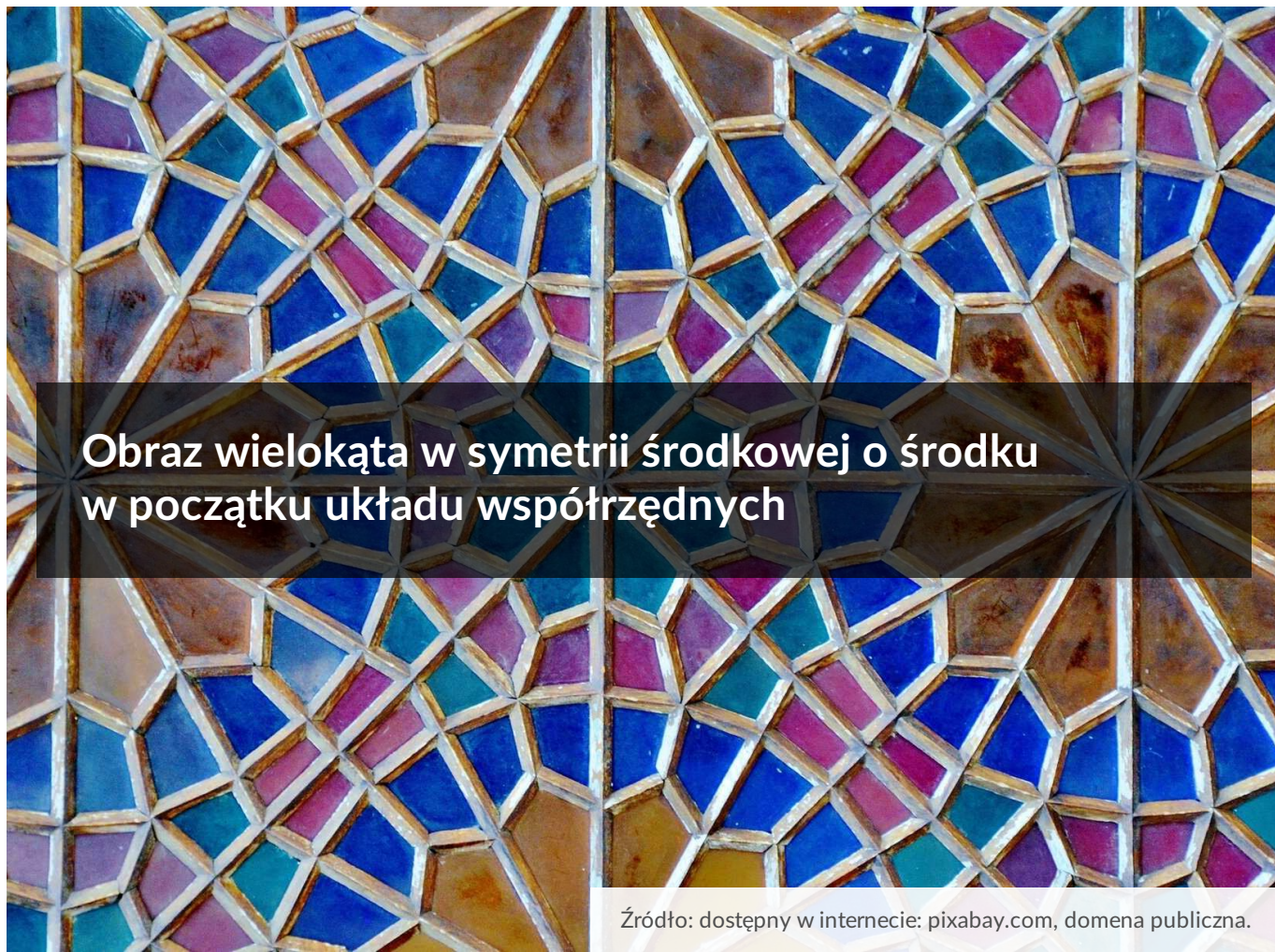




Obraz wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obraz wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Symetria jako własność obiektu matematycznego jest przekształceniem, w którym obrazem tego obiektu jest ten sam lub inny obiekt. Wyróżnia się wiele rodzajów symetrii. W tym materiale skupimy się na symetrii środkowej względem punktu, który jest początkiem układu współrzędnych. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

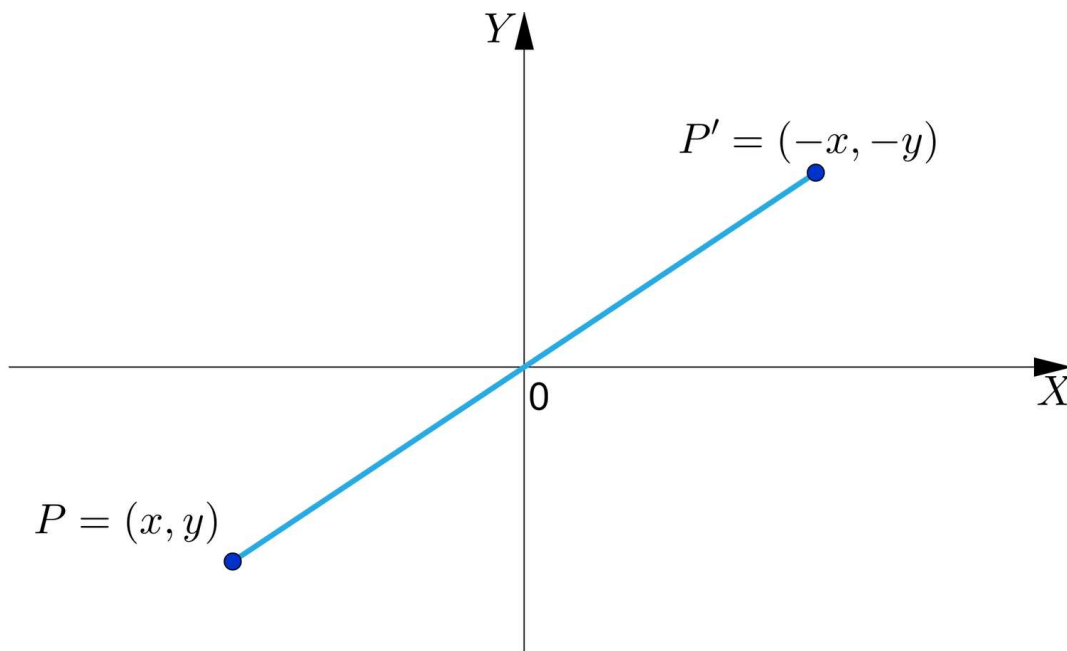
- Wyznaczysz współrzędne wierzchołków wielokąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.
- Narysujesz obraz wielokąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.
- Sprawdzisz, czy wielokąty o podanych wierzchołkach są symetryczne względem początku układu współrzędnych.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

W materiale omówimy, w jaki sposób wyznaczać współrzędne wierzchołków dowolnego **wielokąta** w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, czyli punktu o współrzędnych $(0, 0)$.

Definicja: Punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych

Punkty o współrzędnych $P = (x, y)$ i $P' = (x', y')$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych wtedy gdy $x' = -x$ oraz $y' = -y$.



Z powyższej definicji wynika, że:

- **punktem symetrycznym względem początku układu współrzędnych** do danego punktu jest punkt o przeciwnych współrzędnych,
- początek układu współrzędnych jest środkiem odcinka łączącego dwa punkty, które są względem niego symetryczne.

Ważne!

Obrazem wielokąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest wielokąt do niego przystający o tym samym obwodzie i polu.

Do sprawdzenia, czy dane dwa wielokąty są symetryczne względem początku układu współrzędnych użyjemy wzoru na środek S odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Do wyznaczenia obrazu wielokąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych wystarczy znaleźć obraz wierzchołków tego wielokąta.

Przykład 1

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m punkty o współrzędnych $P = (-m^2, 4)$ oraz $P' = (m + 12, -4)$ są symetryczne względem punktu o współrzędnych $(0, 0)$.

Rozwiązanie:

Jeżeli punkty P i P' są symetryczne względem początku układu współrzędnych, to do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$$-m^2 = -(m + 12)$$

Wobec tego:

$$m^2 - m - 12 = 0$$

Zatem $m = -3$ oraz $m = 4$.

Przykład 2

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (4, -2)$ oraz $C = (1, 5)$.

Wyznamy współrzędne wierzchołków tego trójkąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Niech A' , B' , C' będą punktami symetrycznymi do punktów A , B , C w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$. Wówczas:

$$A' = (3, 1),$$

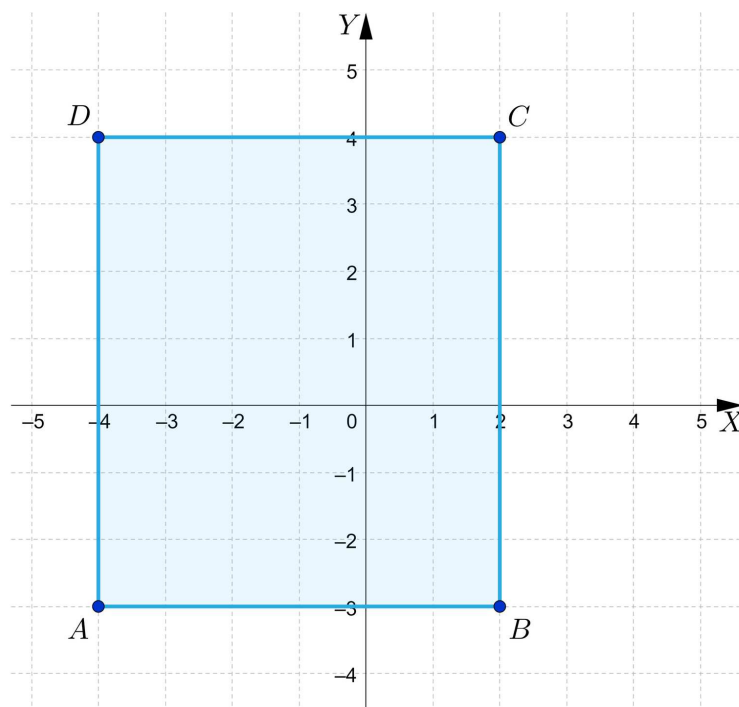
$$B' = (-4, 2),$$

$$C' = (-1, -5).$$

Przykład 3

Wyznamy współrzędne wierzchołków prostokąta $ABCD$ z poniższego rysunku w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie:



Z rysunku odczytujemy współrzędne wierzchołków prostokąta $ABCD$:

$$A = (-4, -3),$$

$$B = (2, -3),$$

$$C = (2, 4),$$

$$D = (-4, 4).$$

Współrzędne wierzchołków prostokąta $ABCD$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych wynoszą odpowiednio:

$$A' = (4, 3),$$

$$B' = (-2, 3),$$

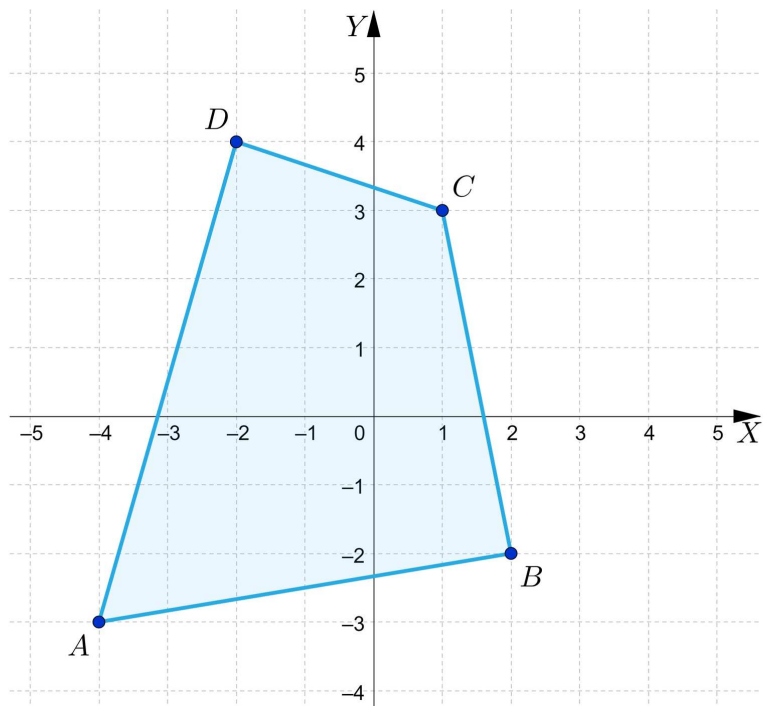
$$C' = (-2, -4),$$

$$D' = (4, -4).$$

W niektórych przypadkach obrazem wielokąta w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest ten sam wielokąt.

Przykład 4

Wyznamy obraz czworokąta $ABCD$ z rysunku w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.



Rozwiązanie:

Z rysunku odczytujemy współrzędne wierzchołków czworokąta:

$$A = (-4, -3),$$

$$B = (2, -2),$$

$$C = (1, 3),$$

$$D = (-2, 4).$$

Obrazem czworokąta $ABCD$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest czworokąt $A'B'C'D'$ o wierzchołkach:

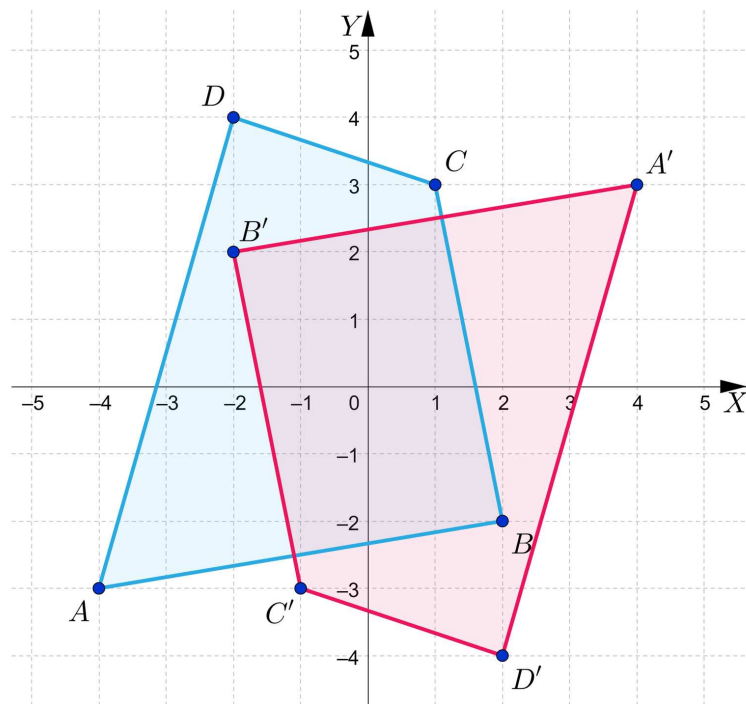
$$A' = (4, 3),$$

$$B' = (-2, 2),$$

$$C' = (-1, -3),$$

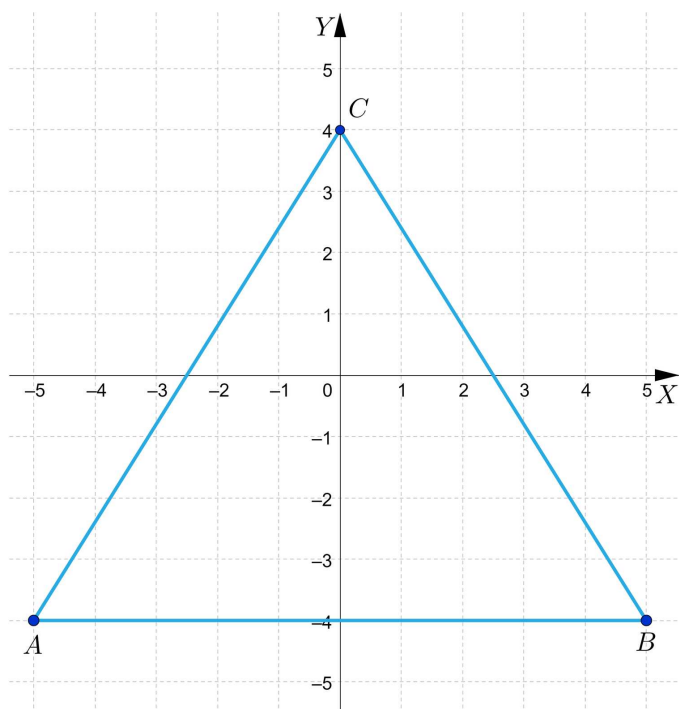
$$D' = (2, -4).$$

Zatem rysunek czworokąta $A'B'C'D'$ przedstawia się następująco:



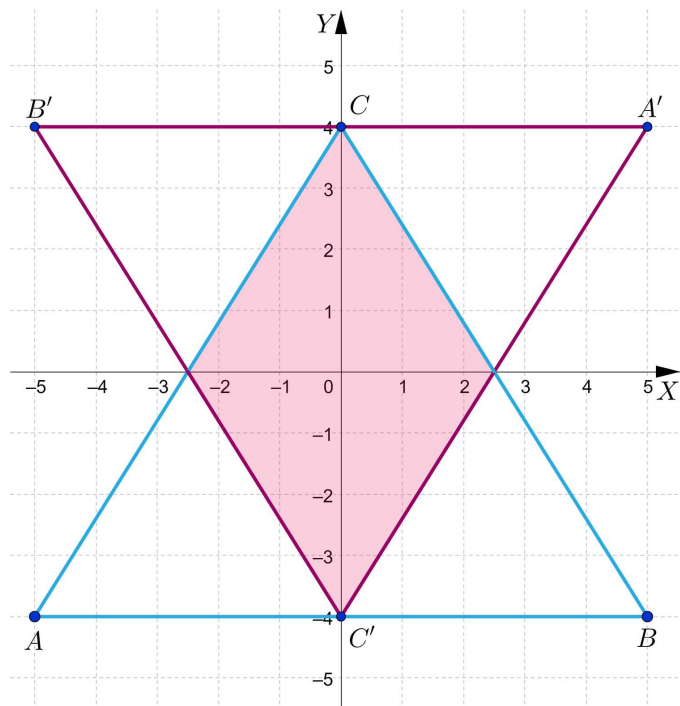
Przykład 5

Wyznamy obraz trójkąta ABC z rysunku w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, a następnie obliczymy pole części wspólnej tych trójkątów.



Rozwiązanie:

Obrazem trójkąta w symetrii jest trójkąt o wierzchołkach $A'B'C'$.

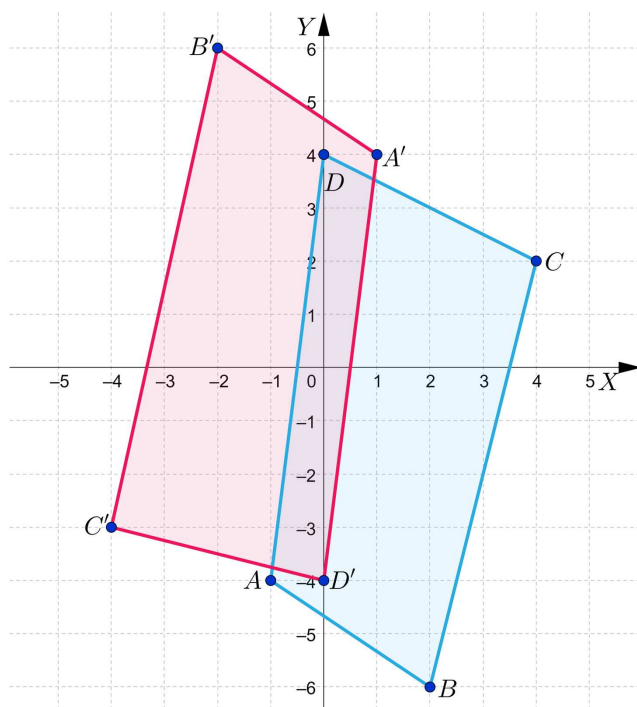


Zauważmy, że częścią wspólną obu trójkątów jest romb o przekątnych długości 8 i 5, zatem jego pole wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20.$$

Przykład 6

Sprawdźmy, czy czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ przedstawione na poniższym rysunku są symetryczne względem początku układu współrzędnych.



Rozwiązanie:

Z rysunku odczytujemy współrzędne wierzchołków.

Dla czworokąta $ABCD$ mamy:

$$A = (-1, -4),$$

$$B = (2, -6),$$

$$C = (4, 2),$$

$$D = (0, 4).$$

Dla czworokąta $A'B'C'D'$ mamy:

$$A' = (1, 4),$$

$$B' = (-2, 6),$$

$$C' = (-4, -3),$$

$$D' = (0, -4).$$

Sprawdzimy, czy punkt o współrzędnych $(0, 0)$ jest środkiem każdego z odcinków AA' , BB' , CC' , DD' .

Oznaczmy środki tych odcinków odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 .

Zatem:

$$S_1 = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-4+4}{2} \right) = (0, 0),$$

$$S_2 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{-6+6}{2} \right) = (0, 0),$$

$$S_3 = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{2-3}{2} \right) = \left(0, -\frac{1}{2} \right),$$

$$S_4 = \left(\frac{0-0}{2}, \frac{4-4}{2} \right) = (0, 0).$$

Ponieważ $S_3 \neq (0, 0)$, zatem czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ przedstawione na rysunku nie są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Słownik

symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

przekształcenie geometryczne, w którym obrazem punktu $P = (x, y)$ jest punkt $P' = (-x, -y)$

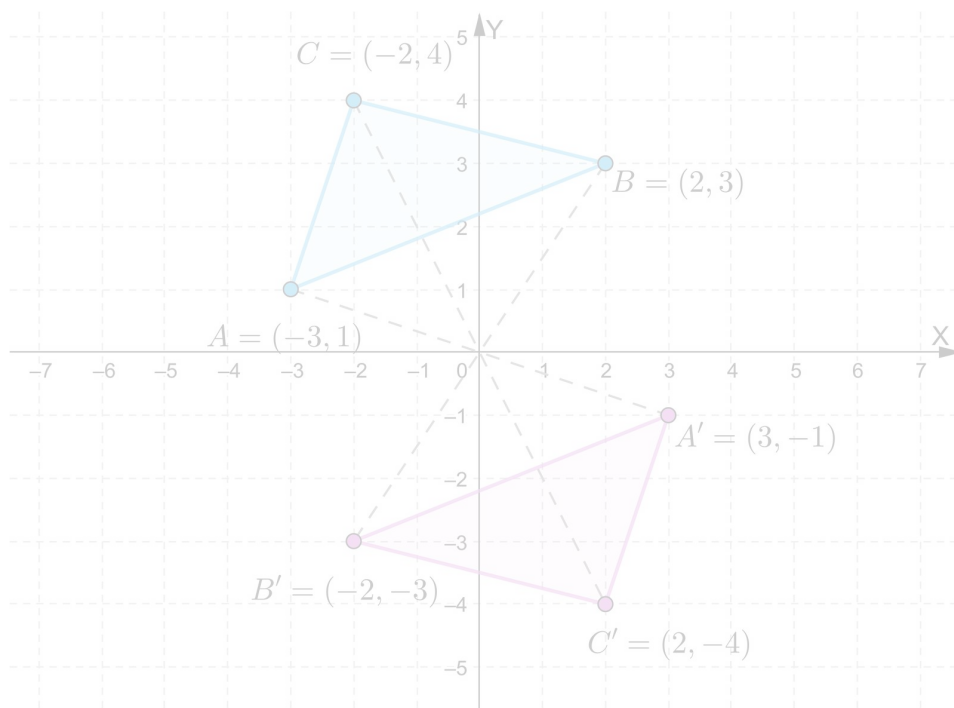
wielokąt

część płaszczyzny ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie zwróć uwagę na współrzędne wierzchołków trójkąta ABC po przekształceniu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3EPQLOE7>

Polecenie 2

Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkątów ABC w symetrii o środku w początku układu współrzędnych, jeżeli:

a) $A = (-5, -8)$, $B = (-2, -4)$, $C = (-3, 5)$,

b) $A = (-1, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (3, 7)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.



Punkty o współrzędnych $P = (m - 1, 3)$ oraz $P' = (-2, 3)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy $m = 3$.



Obrazem punktu $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}, 4\right)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P' = (\sqrt{2} - 1, 4)$.

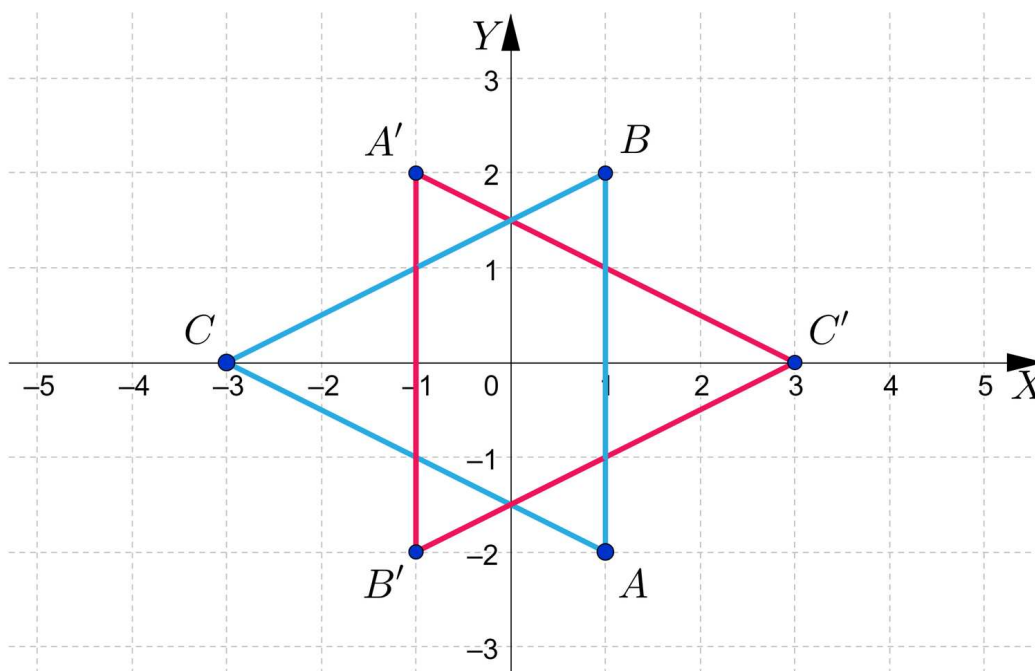


Punkty o współrzędnych $P = (m^2 - m, 2)$ oraz $P' = (-2, -2)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy $m = -1$ oraz $m = 2$.

Ćwiczenie 2



Dane są trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ jak na rysunku poniżej.



Na podstawie rysunku zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają różne pola i obwody.
- ☐ Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.
- ☐ Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola i obwody.
- ☐ Trójkąty ABC i $A'B'C'$ nie są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Ćwiczenie 3



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Dane jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-5, 2)$, $B = (5, -2)$, $C = (3, 4)$, $D = (-3, 5)$ oraz czworokąt $A'B'C'D'$ o wierzchołkach $A' = (5, -2)$, $B' = (-5, 2)$, $C' = (-3, -4)$, $D' = (3, -5)$. Wówczas:

Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (1, -4)$, $B = (2, -5)$, $C = (3, 7)$, $D = (0, 9)$ oraz czworokąt $A'B'C'D'$ o wierzchołkach $A' = (-1, 4)$, $B' = (-2, 5)$, $C' = (-3, -7)$, $D' = (0, 9)$. Wówczas:

wielokąty mają równe obwody

wielokąty nie są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych

wielokąty mają równe pola

wielokąty mają różne obwody

wielokąty są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych

wielokąty mają różne pola

Ćwiczenie 4



Połącz w pary współrzędne wierzchołków trójkątów ABC i $A'B'C'$ tak, aby trójkąty były symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych:

$$A = (-3, 0), B = (-4, -1), \\ C = (-5, -5)$$

$$A' = (-3, 0), B' = (-4, -1), \\ C' = (-5, -5)$$

$$A = (3, 0), B = (-4, 1), C = (-5, 5)$$

$$A' = (3, 0), B' = (4, 1), C' = (5, 5)$$

$$A = (3, 0), B = (4, 1), C = (5, 5)$$

$$A' = (-3, 0), B' = (4, -1), \\ C' = (5, -5)$$

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, to:

$$A = (\text{ }, -6) \text{ i } A' = (4, \text{ })$$

$$B = (-2, -4) \text{ i } B' = (\text{ }, \text{ })$$

$$C = (6, 2) \text{ i } C' = (\text{ }, \text{ })$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Sześciokąty $ABCDEF$ i $A'B'C'D'E'F'$ są symetryczne w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Jeżeli współrzędne wierzchołków sześciokąta $ABCDEF$ wynoszą:

$$A = (-3, -4), B = (-2, -5), C = (0, -6), D = (3, -5), E = (1, 2), F = (-2, 1), \text{ to}$$

współrzędne wierzchołków sześciokąta $A'B'C'D'E'F'$ wynoszą odpowiednio:

$$A' = (\text{ }, \text{ })$$

$$B' = (\text{ }, \text{ })$$

$$C' = (\text{ }, \text{ })$$

$$D' = (\text{ }, \text{ })$$

$$E' = (\text{ }, \text{ })$$

$$F' = (\text{ }, \text{ })$$

Ćwiczenie 7



Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 3)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, a następnie oblicz pole figury powstałej z trójkąta i jego obrazu w podanej symetrii.

Ćwiczenie 8



Sprawdź, czy trójkąty o wierzchołkach $A = (-4, 2)$, $B = (3, -1)$, $C = (0, 4)$ oraz $A' = (4, -2)$, $B' = (-3, 1)$, $C' = (0, -4)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obraz wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje własności funkcji trygonometrycznych,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne w zadaniach opisujących zjawiska w fizyce oraz w życiu codziennym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Obraz wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Obraz wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych”.