



Jak rozwiązywać zadania o liczbach, prowadzące do układu równań liniowych z 2 niewiadomymi?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak rozwiązywać zadania o liczbach, prowadzące do układu równań liniowych z 2 niewiadomymi?

Źródło: dostępny w internecie: [sabines](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Jak znaleźć dwie liczby, gdy znasz ich sumę i różnicę? Jaka liczba dwucyfrowa o sumie cyfr równej 6 jest o 18 większa od liczby powstałej przez zamianę kolejności jej cyfr? Na te i inne podobne pytania zapewne bez problemu odpowiesz, po zapoznaniu się z tym materiałem. Dowiesz się, jak zapisać podane informacje o liczbach w postaci układu równań liniowych.

Twoje cele

- Skorzystasz z własności dziesiętkowego systemu liczbowego.
- Zapiszesz zależności pomiędzy liczbami w postaci układu równań liniowych.
- Zapiszesz zależności pomiędzy liczbą a jej cyframi w postaci układu równań liniowych.
- Rozwiążesz zadania o liczbach, prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Przeczytaj

Czy wiesz, co oznacza zapis 357? Odpowiesz na pewno, że oznacza liczbę trzysta pięćdziesiąt siedem. Odpowiesz tak dlatego, że na co dzień posługujesz się systemem dziesiętnym. To znaczy, że zapis 357 rozumiesz w następujący sposób:

$$357 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Przypomnij sobie definicję dziesiętnego systemu liczbowego.

Definicja: Dziesiętny system liczbowy

Dziesiętny system liczbowy, to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą jest liczba 10, a do zapisu liczb stosuje się 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Każdą n -cyfrową liczbę naturalną możemy jednoznacznie zapisać w systemie dziesiętnym jako

$$a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

gdzie:

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$, to cyfry ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Przy czym pierwsza cyfra (z lewej strony) tej liczby, czyli cyfra a_{n-1} nie może być zerem.

W szczególności każdą **liczbę dwucyfrową** można zapisać jako

$$10x + y$$

gdzie:

x i y są cyframi; x – nazywamy wtedy cyfrą dziesiątek (jest ona różna od zera), a y – cyfrą jedności.

Podobnie, każdą **liczbę trzycyfrową** można zapisać jako

$$100x + 10y + z$$

gdzie:

x – jest cyfrą setek (cyfra ta jest różna od zera), y – cyfrą dziesiątek, a z – cyfrą jedności.

Zobacz, jak wykorzystać znajomość systemu dziesiętnego do rozwiązywania zadań o liczbach naturalnych.

Przykład 1

Jaka **liczba dwucyfrowa** o sumie cyfr równej 6 jest o 18 większa od liczby powstałej przez zamianę kolejności jej cyfr?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza cyfrę dziesiątek, a y cyfrę jedności szukanej liczby. Szukana liczba ma wartość $10x + y$. Jeśli przestawisz jej cyfry, to y stanie się cyfrą dziesiątek, a x cyfrą jedności tak otrzymanej liczby. Będzie ona miała w takim razie wartość $10y + x$.

Zapiszmy zależności opisane w zadaniu w formie układu równań:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 10x + y = 10y + x + 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 9x - 9y = 18 \mid : 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Po dodaniu do siebie równań otrzymujemy $2x = 8$, a więc $x = 4$, a stąd $y = 2$.

Zatem szukaną liczbą jest liczba 42, która rzeczywiście jest większa o 18 od liczby 24.

Przykład 2

W pewnej liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest dwa razy większa do cyfry jedności. Jeśli od cyfry dziesiątek odejmiemy cyfrę jedności, a od cyfry jedności odejmiemy dwa, to otrzymamy liczbę o połowę mniejszą. Jaka to liczba?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza cyfrę dziesiątek, a y cyfrę jedności szukanej liczby. Szukana liczba ma wartość $10x + y$. Jeśli od cyfry dziesiątek odejmiesz cyfrę jedności, a od cyfry jedności odejmiesz 2, to otrzymasz liczbę $10(x - y) + y - 2$.

Zapiszmy zależności opisane w zadaniu w formie układu równań:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 10(x - y) + y - 2 = \frac{1}{2}(10x + y) \end{cases}$$

Zastosujmy metodę podstawiania do rozwiązania tego układu równań:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 10(2y - y) + y - 2 = \frac{1}{2}(10 \cdot 2y + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 11y - 2 = \frac{21y}{2} \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 22y - 4 = 21y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Szukaną liczbą jest 84.

Nie wszystkie zadania o liczbach wykorzystują **dziesiętny system liczbowy**. Układy równań mogą pomóc w wyznaczaniu dwóch różnych liczb, które spełniają pewne warunki. Zapoznaj się z kolejnym przykładem.

Przykład 3

Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 71, a różnica 19.

Rozwiązanie:

Oznaczmy pierwszą liczbę przez x , a drugą przez y i zapiszmy odpowiedni układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 71 \\ x - y = 19 \end{cases}$$

Po dodaniu równań stronami, otrzymujemy $2x = 90$, a więc $x = 45$, a stąd $45 + y = 71$, czyli $y = 26$.

Odpowiedź:

Szukanymi liczbami są 45 i 26.

Innym typem zadań o liczbach, których rozwiązanie wymaga zastosowania układu równań, są zadania o ułamkach zwykłych, w których niewiadomymi są licznik i mianownik tego ułamka. Przeanalizuj przykład.

Przykład 4

Jeśli licznik pewnego nieskracalnego ułamka zwykłego pomnożymy przez 2, a od mianownika odejmiemy 4, to otrzymamy liczbę 1. Jeśli natomiast do licznika dodamy 12, a od mianownika odejmiemy 5, to otrzymamy liczbę 3. Znajdź ten ułamek.

Rozwiązanie:

Niech x oznacza licznik, a y mianownik szukanego ułamka. Szukaną liczbą jest $\frac{x}{y}$. Zapisujemy układ równań, które odpowiadają zależnościom opisanym w zadaniu:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y-4} = 1 \\ \frac{x+12}{y-5} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y - 4 \\ x + 12 = 3(y - 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y - 4 \\ x + 12 = 3y - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x - 3y = -27 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

Stosujemy metodę przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -2x + 6y = 54 \end{cases}$$

Po dodaniu równań stronami, otrzymujemy $5y = 50$, a więc $y = 10$. Stąd $2x - 10 = -4$, a zatem $x = 3$.

Odpowiedź:

Szukany ułamek jest $\frac{3}{10}$.

Słownik

pozycyjny dziesiętny system liczbowy

to system, którego podstawą jest liczba 10; liczby zapisane w tym systemie są sumą potęg liczby 10 pomnożonych przez jedną z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

dwucyfrowa liczba zapisana w systemie dziesiętnym

dwucyfrowa liczba zapisana w systemie dziesiętnym, której cyfrą dziesiątek jest x , a cyfrą jedności jest y , ma wartość

$$10x + y$$

trzycyfrowa liczba zapisana w systemie dziesiętnym

trzycyfrowa liczba zapisana w systemie dziesiętnym, której cyfrą setek jest x , cyfrą dziesiątek jest y , a cyfrą jedności jest z , ma wartość

$$100x + 10y + z$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zadania, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, analizując poszczególne slajdy.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Da0lYWWUc>

Polecenie 2

W myślach wybierz liczbę trzycyfrową i spróbuj opisać ją koledze lub koleżance z ławki na wzór opisu liczby Maćka. Po odgadnięciu Twojej liczby, zamieńcie się rolami.

Polecenie 3

Znajdź liczbę trzycyfrową, której cyfra setek jest równa 7, cyfra jedności jest o 3 mniejsza od cyfry dziesiątek, a liczba powstała przez zamianę miejscami cyfry dziesiątek z cyfrą setek jest o 180 mniejsza od danej liczby.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jacek zapisał liczbę trzycyfrową, której cyfra dziesiątek jest równa 6, cyfra jedności jest trzy razy mniejsza od cyfry dziesiątek, a cyfra setek jest różnicą cyfry dziesiątek i cyfry jedności. Następnie zamienił miejscami cyfrę setek z cyfrą jedności. Jaką liczbę otrzymał Jacek? Wskaż poprawną odpowiedź.

☐ 246

☐ 264

☐ 642

☐ 462

Ćwiczenie 2



Połowa sumy dwóch liczb jest równa 13, a ich różnica jest o 5 większa od mniejszej z nich. Jakie to liczby?

Który z układów równań może prowadzić do rozwiązania powyższego zadania? Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 13 \\ x - y = y + 5 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + y = 26 \\ x - y = x + 5 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 13 \\ x - y = y - 5 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + y = 26 \\ y - x = x + 5 \end{cases}$$

Ćwiczenie 3



Niech x oznacza cyfrę dziesiątek, a y cyfrę jedności pewnej liczby dwucyfrowej. Połącz opisane zależności z odpowiadającymi im równaniami.

Gdy od cyfry jedności odejmiemy cyfrę dziesiątek (a cyfrę dziesiątek pozostawimy bez zmian), to otrzymamy liczbę o takich samych cyfrach jedności i dziesiątek.

$$y - x = x$$

Gdy zamienimy miejscami cyfrę dziesiątek z cyfrą jedności, to otrzymamy liczbę o 36 większą.

$$10y + x = 10x + y + 36$$

Cyfra dziesiątek jest o połowę mniejsza od cyfry jedności.

$$y = 2x$$

Gdy podwoimy cyfrę dziesiątek, to otrzymamy liczbę o 40 większą.

$$20x + y = 10x + y + 40$$

Ćwiczenie 4



Malwina zapisała dwie liczby. Gdy policzyła różnicę podwojonej pierwszej liczby i drugiej liczby, to otrzymała wynik 4. Gdy od podwojonej drugiej liczby odjęła potrojoną pierwszą liczbę, to otrzymała 17. Jakie liczby zapisała Malwina?

Ćwiczenie 5



Dane są dwie liczby, z których druga jest o 20% większa od pierwszej. Jeśli od drugiej liczby dodamy 18, to otrzymamy liczbę o 50% większą od pierwszej liczby pomniejszonej o 5. Znajdź sumę tych liczb.

Ćwiczenie 6



Jeśli od licznika pewnego nieskracalnego ułamka zwykłego odejmiemy 3, a do jego mianownika dodamy 2, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli od licznika tego ułamka odejmiemy 1, a mianownik pomnożymy przez 2, a następnie odejmiemy od niego 8, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Jaki to ułamek?

Ćwiczenie 7



Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 14. Jeśli zamienimy jej cyfr miejscami, to otrzymamy liczbę o 36 mniejszą. Jaka to liczba?

Ćwiczenie 8



Jeśli pomiędzy cyfry pewnej liczby dwucyfrowej wstawimy 6, to otrzymamy liczbę 11 razy większą. Jeśli zamienimy jej cyfry miejscami, to otrzymamy liczbę o 6 większą od trzykrotności tej liczby. Jaka to liczba?

Dla nauczyciela

Autor: Marta Frankowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak rozwiązywać zadania o liczbach, prowadzące do układu równań liniowych z 2 niewiadomymi?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje treść zadania tekstowego;
- wykorzystuje zapis dziesiętny liczby;
- wskazuje i oznacza niewiadome;
- układa i zapisuje zależności pomiędzy niewiadomymi w postaci układu równań;
- stosuje znane mu metody do rozwiązania układu równań;
- rozwiązuje układ równań.

Strategie nauczania:

- strategia asocjacyjna;

- strategia operacyjna.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Jak rozwiązywać zadania o liczbach, prowadzące do układu równań liniowych z 2 niewiadomymi?” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na rzutniku prezentację multimedialną.
2. Po zakończeniu prezentacji nauczyciel pyta, czy rozwiązania zadań przedstawionych w prezentacji są dla wszystkich zrozumiałe. W razie wątpliwości, tłumaczy zadania.
3. Uczniowie w parach wykonują pierwsze polecenie zamieszczone pod prezentacją.
4. Wybrany uczeń rozwiązuje na tablicy zadanie zamieszczone w Poleceniu 2. .
5. Nauczyciel dzieli klasę na trzy grupy. Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która jako pierwsza zakończy rozwiązywanie ćwiczeń, przedstawia rozwiązanie wybranego ćwiczenia. Jeśli jej rozwiązanie jest poprawne, typuje następną grupę do rozwiązania kolejnego zadania. Rozwiązanie ostatniego ćwiczenia przedstawia trzecia grupa.
6. Uczniowie samodzielnie wykonują ćwiczenia 4--5 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 6–8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Układ dwóch równań liniowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel powinien się upewnić, że uczniowie znają metody rozwiązywania układów równań. Może też zachęcić uczniów do zapoznania się z prezentacją multimedialną przed lekcją. Materiał może zostać wykorzystany jako pomoc przy powtórzeniu wiadomości z rozwiązywania układów równań liniowych lub budowy liczb naturalnych.