



Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych

Źródło: Sraone, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Trygonometria ma szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach życia, w których musimy obliczać rzeczywiste wielkości. Zależności trygonometryczne wykorzystujemy przy pomiarach na powierzchni ziemi, czy do prawidłowego działania urządzeń nawigacyjnych. Czasami wiedza na temat funkcji trygonometrycznych jest również przydatna do wyznaczenia obwodów i pól wielokątów. W materiale pokażemy, jak wykorzystać wspomniane funkcje, aby wyznaczyć te wielkości. Bazując na części teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

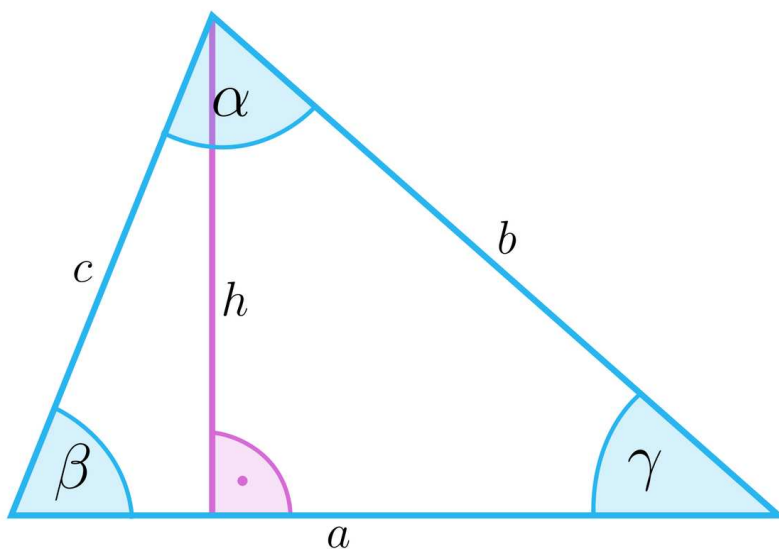
Twoje cele

- Obliczysz pola i obwody wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.
- Wskażesz trójkąty prostokątne, na podstawie których obliczysz brakujące wielkości.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny do rozwiązania zadania.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów z życia codziennego.

Przeczytaj

Przypomnijmy wzory na **pola** i **obwody** różnych wielokątów.

Trójkąt



$$L = a + b + c$$

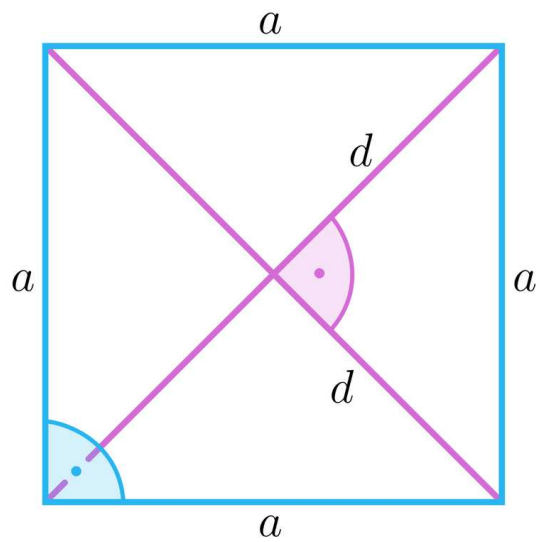
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$P = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

gdzie:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Kwadrat



$$L = 4 \cdot a$$

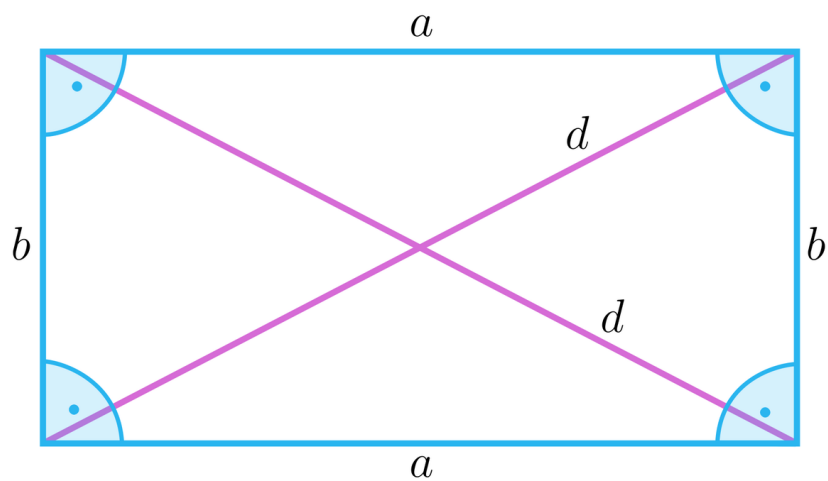
$$P = a^2$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d^2,$$

gdzie:

$$d = a\sqrt{2}$$

Prostokąt

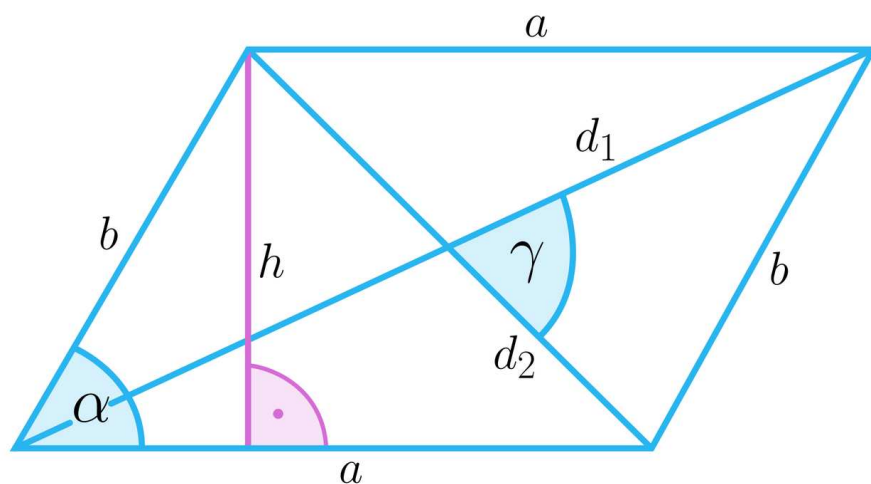


$$L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$P = a \cdot b$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Równoległobok

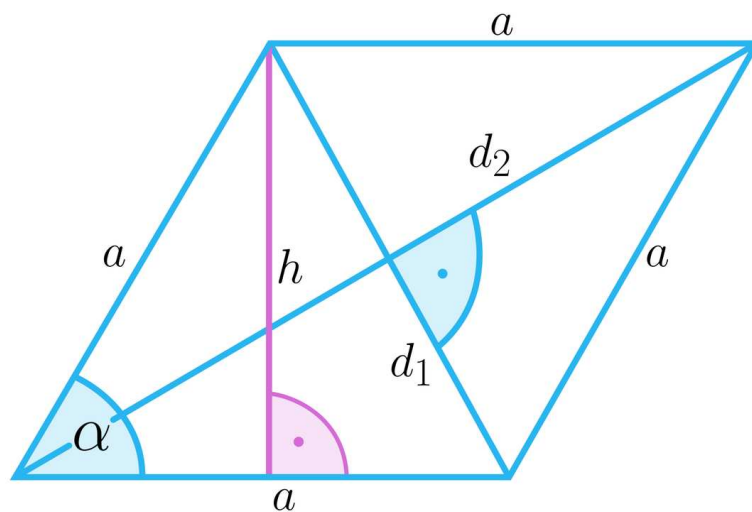


$$L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$P = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \gamma$$

Romb

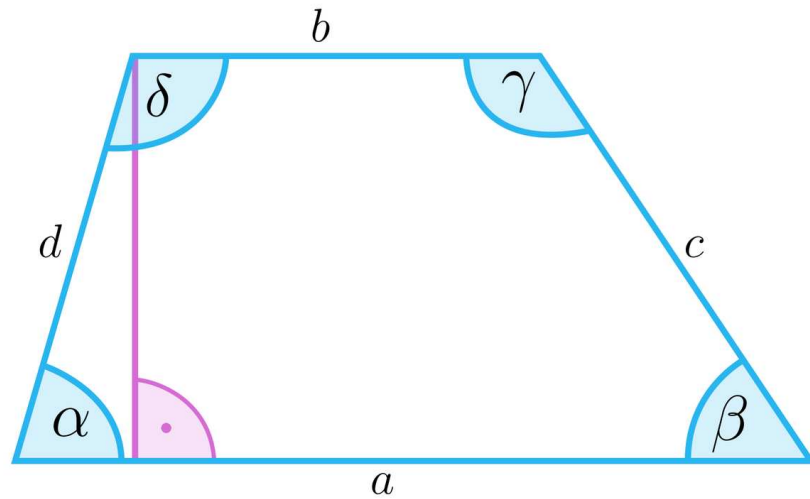


$$L = 4 \cdot a$$

$$P = a \cdot h = a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

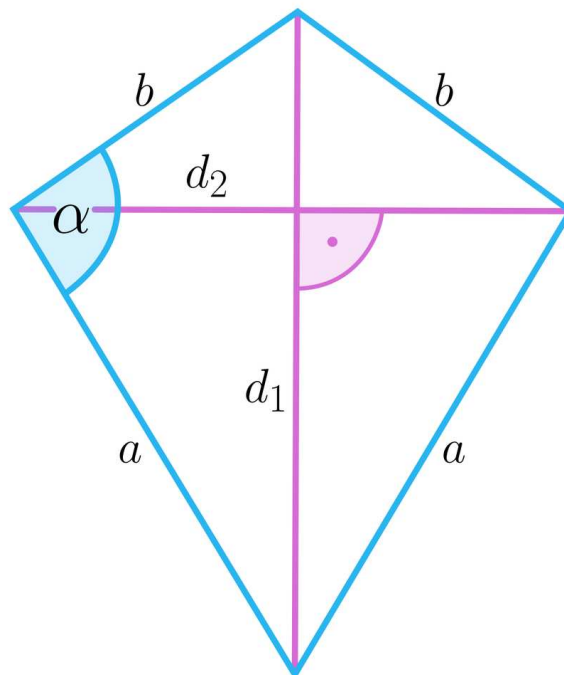
Trapez



$$L = a + b + c + d$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

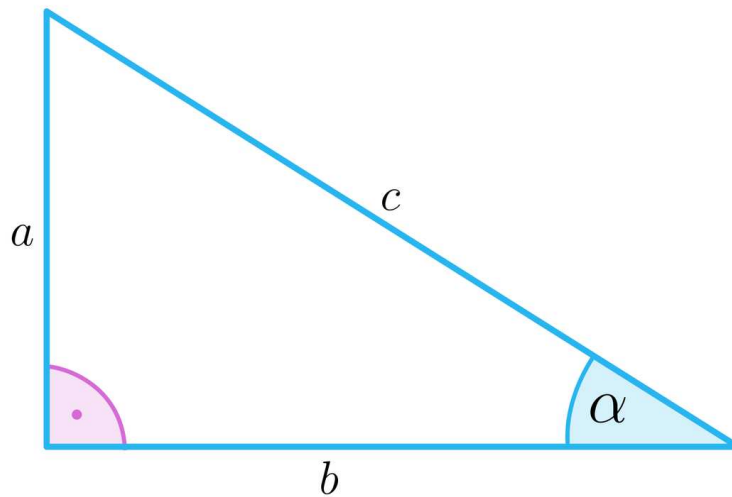
Deltoid



$$L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Do obliczania pól i obwodów wielokątów wykorzystamy funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

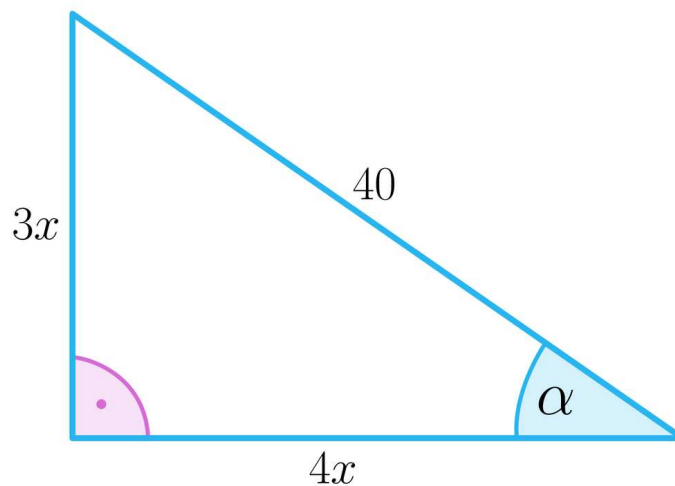
W poniższych przykładach omówimy, jak wyznaczać pola i obwody wielokątów z zastosowaniem [funkcji trygonometrycznych](#).

Przykład 1

Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{3}{4}$, a przeciwprostokątna trójkąta ma długość 40. Wyznamy pole i obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Jeżeli tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{3}{4}$, to narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Do wyznaczenia wartości x wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa. Zatem:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 40^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = 1600$$

$$25x^2 = 1600$$

$$x^2 = 64.$$

Wobec tego $x = 8$.

Przyprostokątne trójkąta mają długości $3x = 24$ i $4x = 32$.

Zatem obwód trójkąta jest równy:

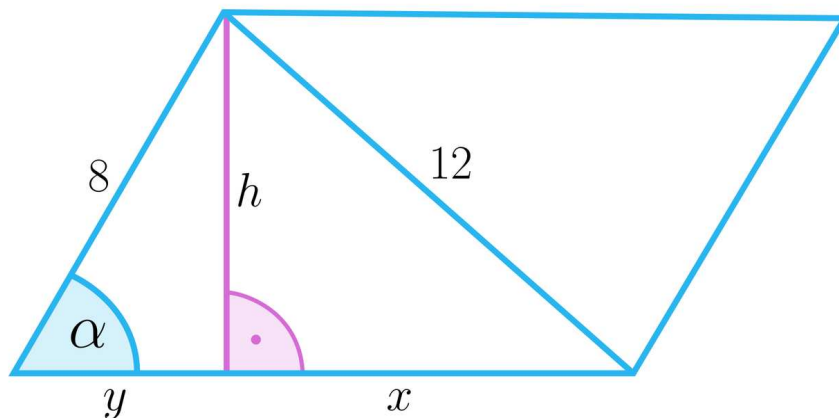
$$L = 24 + 32 + 40 = 96.$$

Pole trójkąta wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 24 = 384.$$

Przykład 2

Obliczymy pole i obwód równoległoboku o wymiarach jak na rysunku, jeżeli wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.



Rozwiązanie:

Jeżeli $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, to zachodzi zależność:

$$\frac{h}{8} = \frac{3}{4}, \text{ czyli } h = 6.$$

Długości odcinków x i y obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$6^2 + x^2 = 12^2$$

$$36 + x^2 = 144$$

$$x^2 = 108$$

$$x = 6\sqrt{3},$$

$$6^2 + y^2 = 8^2$$

$$36 + y^2 = 64$$

$$y^2 = 28$$

$$y = 2\sqrt{7}.$$

Zatem podstawa równoległoboku ma długość:

$$x + y = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}.$$

Obwód równoległoboku wynosi:

$$L = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) + 2 \cdot 8 = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 16.$$

Pole równoległoboku jest równe:

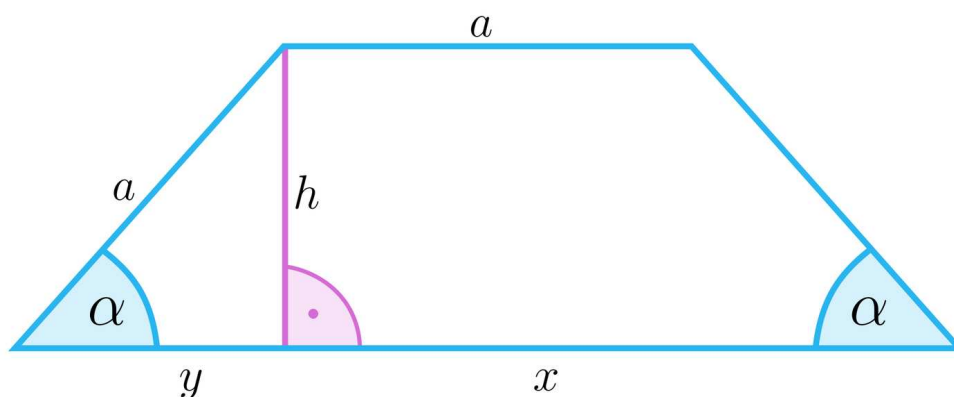
$$P = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) \cdot 6 = 18\sqrt{3} + 6\sqrt{7}.$$

Przykład 3

Wyznamy obwód i pole trapezu równoramiennego o kącie ostrym α , jeżeli ramię oraz krótsza podstawa mają długość a .

Rozwiązanie:

Narysujmy trapez równoramienny i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, wyznaczamy długości odpowiednich odcinków:

$$\frac{h}{a} = \sin \alpha, \text{ więc } h = a \cdot \sin \alpha,$$

$$\frac{y}{a} = \cos \alpha, \text{ więc } y = a \cdot \cos \alpha.$$

Zauważmy, że $x = a + 2 \cdot y$, zatem:

$$x = a + 2 \cdot a \cdot \cos \alpha.$$

Pole tego trapezu wynosi:

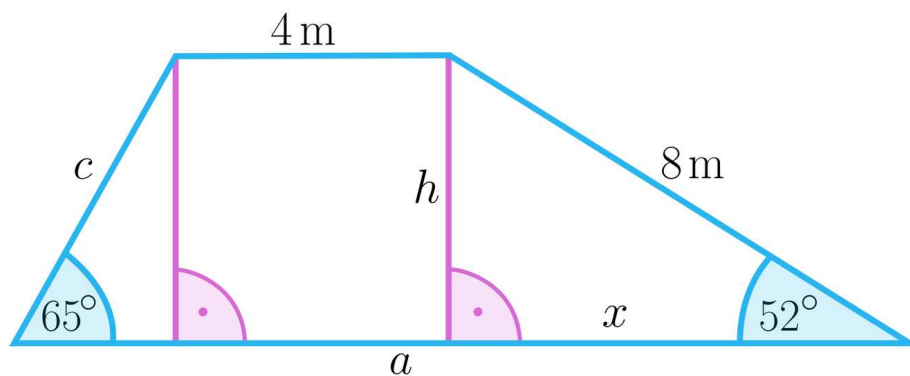
$$P = \frac{1}{2} \cdot (2a + 2a \cdot \cos \alpha) \cdot a \cdot \sin \alpha = a^2 \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha.$$

Obwód tego trapezu jest równy:

$$L = 2a + 2a \cdot \cos \alpha + 2a = 4a + 2a \cdot \cos \alpha = 2a \cdot (2 + \cos \alpha).$$

Przykład 4

Działka ma kształt trapezu, jak na poniższym rysunku. Obliczymy obwód i pole tej działki.



Rozwiązanie:

Do wyznaczenia długości x , h i c użyjemy tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zatem:

$$\frac{h}{8} = \sin 52^\circ, \text{ więc } h = 8 \cdot \sin 52^\circ \approx 8 \cdot 0,79 = 6,32,$$

$$\frac{x}{8} = \cos 52^\circ, \text{ więc } x = 8 \cdot \cos 52^\circ \approx 8 \cdot 0,62 = 4,96,$$

$$\frac{6,32}{c} = \sin 65^\circ, \text{ więc } c \approx 6,97$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, mamy zależność:

$$y^2 + (6,32)^2 = (6,97)^2, \text{ więc } y \approx 2,94.$$

Długość podstawy a trapezu wynosi:

$$a = 4 + x + y = 4 + 4,96 + 2,94 = 11,9.$$

Obwód trapezu jest równy:

$$L = a + 8 + 4 + c = 11,9 + 8 + 4 + 6,97 = 30,87 \text{ m.}$$

Pole trapezu wynosi:

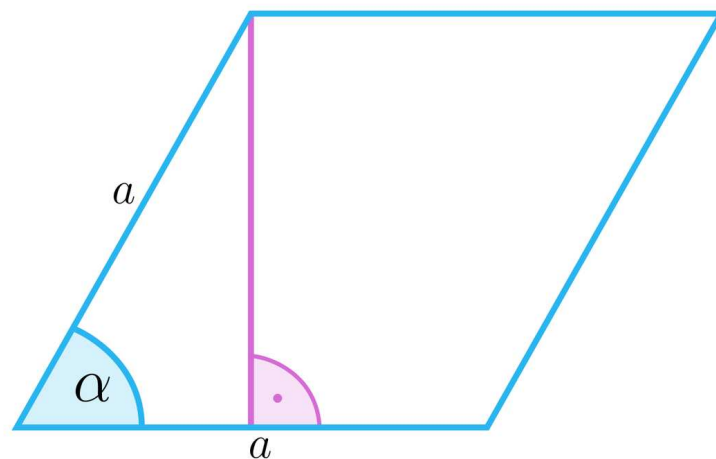
$$P = \frac{(11,9+4)}{2} \cdot 6,32 = 50,244 \text{ m}^2.$$

Przykład 5

Obliczymy obwód rombu, jeżeli jego pole jest równe 48, a cosinus kąta ostrego wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy romb i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Jeżeli $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, to korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną, obliczamy wartość sinusa tego kąta:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{9}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{1}{3}, \text{ bo } \alpha \text{ jest kątem ostrym.}$$

Ze wzoru na pole równoległoboku $P = a^2 \cdot \sin \alpha$ obliczamy długość boku rombu:

$$48 = a^2 \cdot \frac{1}{3}, \text{ więc } a^2 = 144, \text{ czyli } a = 12.$$

Wobec tego obwód rombu jest równy:

$$L = 4 \cdot 12 = 48.$$

Słownik

funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

funkcje wyrażające stosunki między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych

obwód wielokąta

suma długości wszystkich boków wielokąta

pole wielokąta

suma pól trójkątów, z których zbudowany jest dany wielokąt

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą obliczania pola i obwodu trójkąta z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D19iDxrRQ>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej obliczania pól i obwodów wielokątów.

Polecenie 2

Okno ma kształt trapezu równoramiennego, w którym przekątna długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{2}{3}$, a górna podstawa ma długość 4. Oblicz obwód oraz pole powierzchni tego okna.

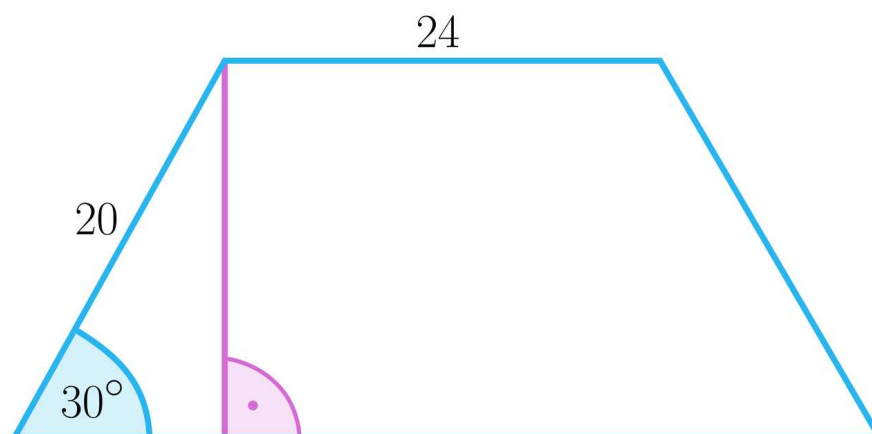
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest trapez równoramienny jak na poniższym rysunku.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pole trapezu wynosi:

☐ $340\sqrt{3}$.

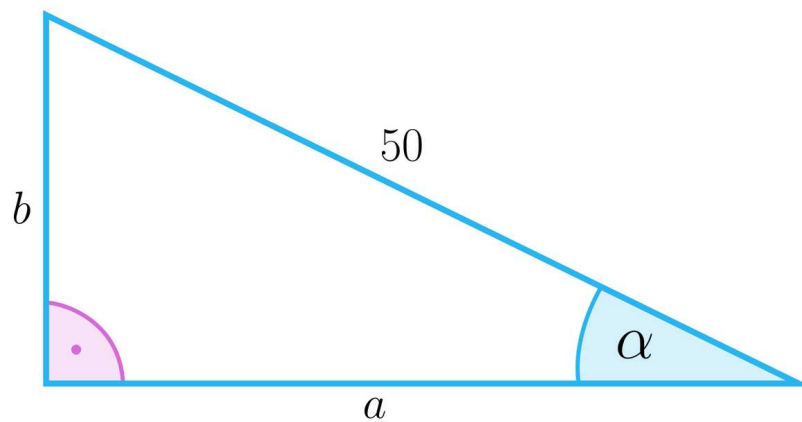
☐ $120 + 100\sqrt{3}$.

☐ $240 + 100\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2



Dany jest trójkąt prostokątny o wymiarach jak na rysunku poniżej.



Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Zaznacz wszystkie zdania, które są prawdziwe.

- ☐ Pole trójkąta prostokątnego z rysunku wynosi 84.
- ☐ Obwód trójkąta prostokątnego z rysunku jest równy 112.
- ☐ Pole trójkąta prostokątnego z rysunku wynosi 336.
- ☐ Obwód trójkąta prostokątnego z rysunku jest równy 81.

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

W trapezie równoramiennym sinus kąta ostrego jest równy $\frac{1}{4}$, ramię ma długość 8, a krótsza podstawa 6. Wtedy:

W równoległoboku wysokość ma długość $\sqrt{21}$ i jest opuszczona na bok o długości 8 a sinus kąta ostrego przy tym boku jest równy $\frac{1}{3}$. Wtedy:

obwód figury jest równy
 $16 + 6\sqrt{21}$

jedna z przekątnych ma długość
 $\sqrt{253 + 32\sqrt{42}}$

pole figury jest równe $8\sqrt{21}$

obwód figury jest równy
 $28 + 4\sqrt{15}$

przekątna ma długość
 $\sqrt{100 + 24\sqrt{15}}$

pole figury jest równe
 $12 + 4\sqrt{15}$

Ćwiczenie 5



Dany jest romb, w którym kąt ostry ma miarę 45° , a jego pole jest równe $40\sqrt{2}$. Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Wysokość rombu ma długość .

Bok rombu ma długość .

Obwód rombu jest równy .

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź. W trapezie prostokątnym podstawy mają długości 12 i 8, a tangens kąta ostrego jest równy $\sqrt{2}$. Zatem:

☐ Obwód trapezu jest równy $24 + 4\sqrt{2}$.

☐ Pole trapezu jest równe $40\sqrt{2}$.

☐ Wysokość trapezu ma długość $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 7



Krótsza przekątna równoległoboku, w którym kąt ostry ma miarę α , dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Wyznacz pole i obwód równoległoboku wiedząc, że ta przekątna ma długość 6 oraz $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 8



Pole trójkąta prostokątnego jest równe 30. Wyznacz obwód tego trójkąta, jeżeli tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{3}$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pola i obwody wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych;
- wskazuje trójkąty prostokątne, na podstawie których obliczy brakujące wielkości;
- dobiera odpowiedni model matematyczny do rozwiązania zadania;
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów z życia codziennego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 z sekcji „Sprawdź się” uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi; zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadań.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra

toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych”).

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości w zakresie obliczania pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.