



Nierówności kwadratowe niezupełne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówności kwadratowe niezupełne

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem nierówności kwadratowych niezupełnych, czyli takich, w których **współczynnik b** lub **wyraz wolny c** jest równy 0. W tego typu nierównościach, wykorzystując wzory skróconego mnożenia lub wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, możemy doprowadzić np. lewą stronę nierówności do postaci iloczynowej. Następnie, na podstawie odpowiedniego rysunku odczytamy zbiór rozwiązań nierówności.

Twoje cele

- Rozpoznasz nierówność kwadratową niezupełną.
- Rozwiązesz nierówność kwadratową niezupełną.
- Wyznaczysz takie współczynniki nierówności, aby jej rozwiązaniem był określony zbiór.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność kwadratowa

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Nierówności, w których wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi zupełnymi**.

Nierówności, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi niezupełnymi**.

Jeżeli $b = 0$ i $c = 0$ to **nierówność kwadratowa** jest postaci $ax^2 > 0$ lub $ax^2 < 0$ lub $ax^2 \geq 0$ lub $ax^2 \leq 0$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność kwadratową niezupełną $x^2 - 16 \leq 0$.

Zapiszemy nierówność w postaci równoważnej.

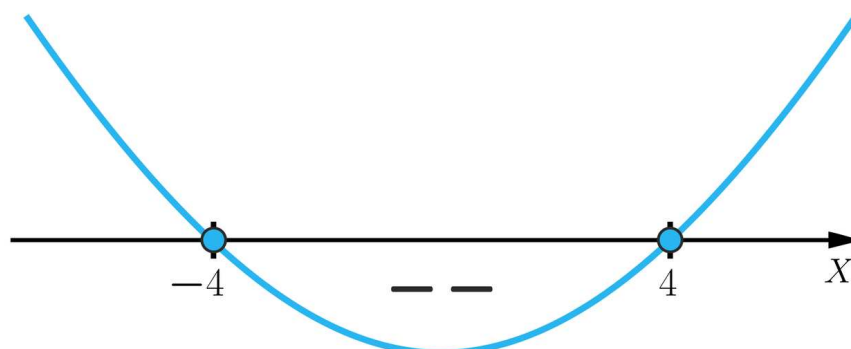
$$(x - 4)(x + 4) \leq 0$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = (x - 4)(x + 4)$.

$$x - 4 = 0 \text{ lub } x + 4 = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -4$$

Szkicujemy przybliżony wykres funkcji f . Parabola ma ramiona skierowane „do góry”, bo współczynnik przy x^2 jest dodatni i wykres przechodzi przez wyznaczone punkty.



Zbiór rozwiązań: $x \in \langle -4, 4 \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $x^2 + 1 < 0$.

Lewa strona nierówności jest liczbą dodatnią, a prawa strona jest równa zero. Zatem nierówność jest sprzeczna. Nie posiada rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiążemy **nierówność kwadratową niezupełną** $-3x^2 + 6x < 0$.

Wyłączymy $3x$ przed nawias.

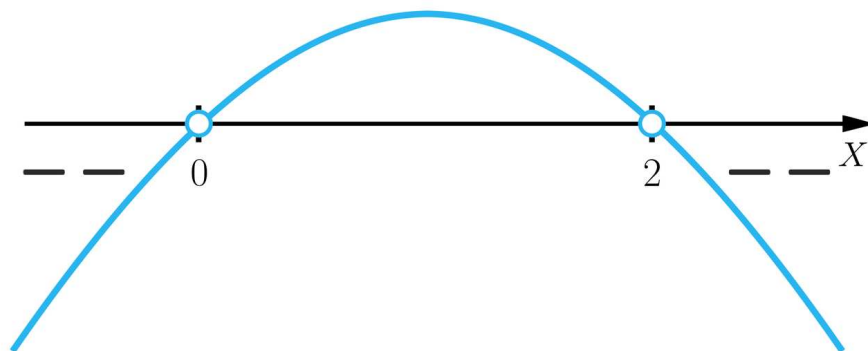
$$3x(-x + 2) < 0$$

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = 3x(-x + 2)$.

$$3x(-x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Szkicujemy parabolę, która ma ramiona skierowane „do dołu” i przechodzi na osi X przez punkty o współrzędnej odpowiednio (0) i (2) .



Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

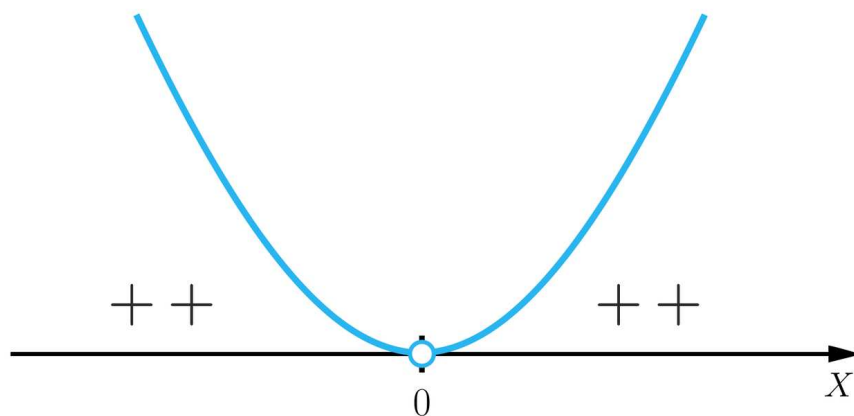
Rozwiązaniem nierówności jest $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $0 < x^2 \leq 9$.

Zapiszemy nierówność w postaci koniunkcji nierówności $x^2 > 0$ i $x^2 \leq 9$.

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = x^2$ odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 > 0$.



$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Rozwiążemy teraz nierówność $x^2 \leq 9$.

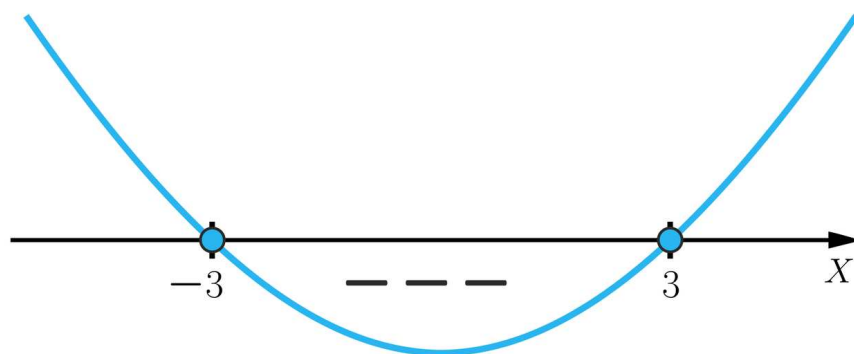
Zapiszemy nierówność w postaci równoważnej.

$$(x - 3)(x + 3) \leq 0$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = (x - 3)(x + 3)$.

$$x = 3 \text{ lub } x = -3$$

Szkicujemy przybliżony wykres funkcji f .



Zbiór rozwiązań nierówności $x^2 \leq 9$ to $x \in \langle -3, 3 \rangle$.

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \in \langle -3, 3 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3)$$

Zbiór rozwiązań podwójnej nierówności tworzą wszystkie liczby x takie, że

$$x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3).$$

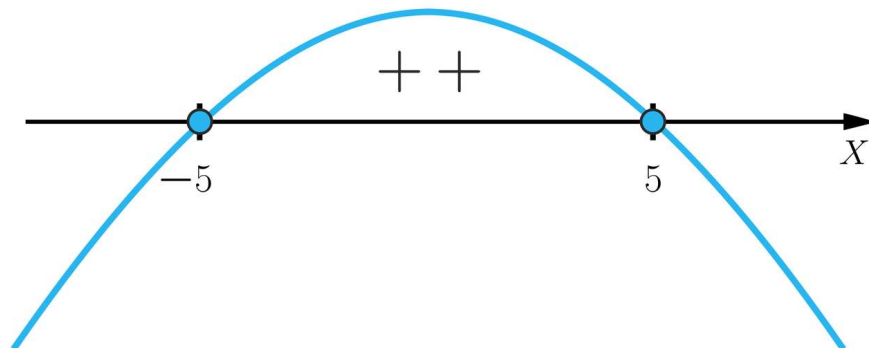
Przykład 5

Wyznamy sumę i iloczyn całkowitych rozwiązań nierówności

$$(5 - x)(5 + x) \geq 0 \text{ i } x(5 - x) > 0.$$

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem nierówności $(5 - x)(5 + x) \geq 0$.

$$x = 5 \vee x = -5$$

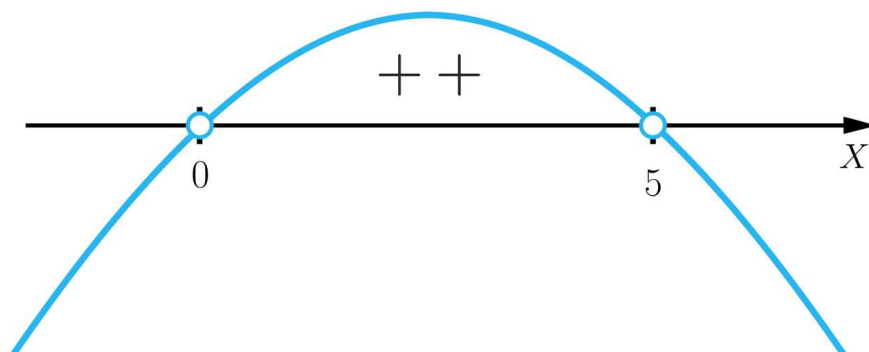


$$x \in \langle -5, 5 \rangle$$

Zbiór całkowitych rozwiązań nierówności to $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rozwiążemy nierówność $x(5 - x) > 0$.

$$x = 0 \vee x = 5$$



$$x \in (0, 5)$$

Całkowite rozwiązania tej nierówności to $\{1, 2, 3, 4\}$.

Wyznamy teraz sumę i iloczyn całkowitych rozwiązań nierówności.

$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} =$$

$$= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Przykład 6

Obliczymy, dla jakich x funkcja $f(x) = 2x^2 + 1$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $g(x) = (x - 1)^2$.

Warunki zadania będą spełnione dla x należących do zbioru rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

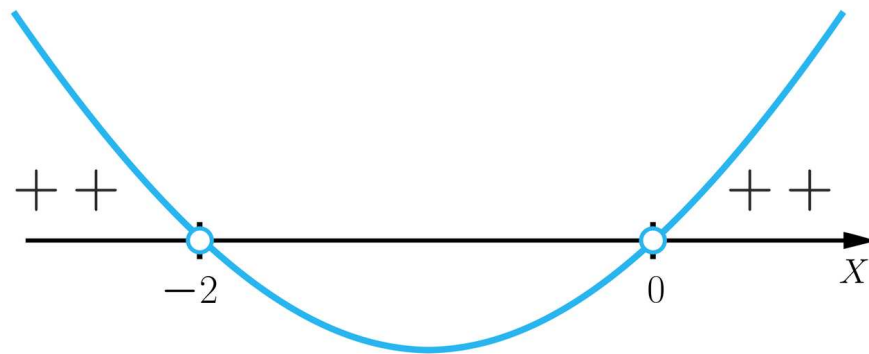
$$2x^2 + 1 > (x - 1)^2$$

$$2x^2 + 1 > x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x + 2) > 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -2$$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$$

Funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g dla $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

Słownik

nierówność kwadratowa

każda nierówność postaci

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$

nierówność kwadratowa niezupełna

| nierówność, w której współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją oraz ze sposobami rozwiązywania nierówności kwadratowych niezupełnych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18kikPLU>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej nierówności kwadratowych niezupełnych.

Polecenie 2

Połącz w pary każdą z nierówności ze zbiorem jej rozwiązań.

$$-x^2 + 8x < 0$$

$$(0, \frac{1}{8})$$

$$8x^2 + x > 0$$

$$(0, 8)$$

$$2x^2 - 16x < 0$$

$$(-\infty, -\frac{1}{8}) \cup (0, \infty)$$

$$4x^2 - 0,5x < 0$$

$$(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ile liczb całkowitych należy do zbioru rozwiązań nierówności $(x - 3)^2 \leq x + 9$?

☐ 8

☐ 7

☐ 5

☐ 6

Ćwiczenie 2



Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi. Nierówność $2x^2 - 4 > 0$ ma ten sam zbiór rozwiązań co nierówność:

☐ $2x^2 > -4$

☐ $-x^2 + 2 < 0$

☐ $x^2 > \sqrt{2}$

☐ $x^2 - 2 > 0$

☐ $(\sqrt{2}x - 2)(\sqrt{2}x + 2) > 0$

☐ $(x - 2)(x + 2) > 0$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Nierówność kwadratowa, której zbiorem rozwiązań jest zbiór $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ to:

☐ $(x - 3)^2 \leq 3(2x - 4)$

☐ $-x^2 - 3 \geq 0$

☐ $-(x - 3)^2 \geq 3(2x - 4)$

☐ $x^2 - 3 \geq 0$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary każdą nierówność ze zbiorem rozwiązań tej nierówności.

$3x^2 - x < 0$

$(0, \frac{1}{3})$

$3x^2 - 1 > 0$

$(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

$-x^2 + 3x < 0$

$(-\infty, -3) \cup (0, \infty)$

$-x^2 + 3 > 0$

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$x^2 + 3x > 0$

$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$

Ćwiczenie 5



Wpisz w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby rozwiązaniem nierówności

$x^2 + 2x \geq 0$ był zbiór $\langle 0, \frac{2}{3} \rangle$.

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Zbiorem rozwiązań nierówności podwójnej $1 < x^2 < 25$ jest zbiór:

☐ $(-5, -1) \cup (1, 5)$

☐ $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

☐ $(-\infty, -5) \cup (-5, 1) \cup (5, \infty)$

☐ $(-5, 5)$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Oblicz, dla jakich x funkcja $f(x) = (x + 2)^2$ przyjmuje wartości nie mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -x^2 + 4x + 8$.

Przeciągnij w wyznaczone miejsca odpowiednie liczby.

$x \in (-\infty, \boxed{}) \cup (\boxed{}, \infty)$

$\sqrt{2}$

-2

4

2

$-\sqrt{2}$

0

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówności kwadratowe niezupełne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje nierówność kwadratową niezupełną
- rozwiązuje nierówność kwadratową niezupełną typu $ax^2 + bx > 0$ lub $ax^2 + c > 0$
- wyznacza takie współczynniki nierówności, aby jej zbiór rozwiązań spełniał określone warunki
- tworzy procedury budowy nierówności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają metody rozwiązywania równań kwadratowych niezupełnych, aby wykorzystać je podczas rozwiązywania nierówności.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów prostych nierówności kwadratowych niezupełnych.
2. Następnie uczniowie starają się podzielić nierówności na grupy, według własnych kryteriów.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują zbiory rozwiązań nierówności.
4. Przykłady rozwiązań nierówności znajdujące się w części „Przeczytaj” uczniowie analizują w parach. Wspólnie z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
5. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
6. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stolik zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje ocenę bardzo dobry.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące podziału nierówności kwadratowych niezupełnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność kwadratowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów jako materiał powtórzeniowy przed pracą klasową.