



Wstęp do modelowania matematycznego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wstęp do modelowania matematycznego

Źródło: Nadine Shaabana, domena publiczna.

Czy wiesz, że modele matematyczne pozwalają przewidywać różne zjawiska? Możemy przewidzieć działanie wybranego układu, nawet nie mając z nim styczności. Stosując modelowanie zamienimy m.in. zaawansowane procesy biologiczne i fizyczne na upraszczające je wzory matematyczne.

Modelowanie matematyczne możemy wykorzystać np. do opisu rozwoju populacji różnych gatunków zwierząt. W rzeczywistości rozbudowany, niejednopłaszczyznowy proces sprowadzamy do kilku czynników (m.in. szybkości reprodukcji, tempa wymierania czy całkowitej liczebności populacji), między którymi występują określone korelacje. Wyniki otrzymane dzięki gotowemu modelowi mogą być nieocenione dla np. programu ochrony gatunkowej roślin i zwierząt.

W tym e-materiale wyjaśnimy dokładniej, jak działa i czym charakteryzuje się modelowanie matematyczne. Omówimy również najważniejsze fakty dotyczące liczby π , do której obliczania możemy wykorzystywać modele matematyczne np. metodę Monte Carlo.

Twoje cele

- Wyjaśnisz, czym jest modelowanie matematyczne.
- Przedstawisz historię oraz ciekawostki o liczbie π
- Przeanalizujesz, w jaki sposób wyznacza się liczbę π .

Modelowanie matematyczne

Istotę modelowania matematycznego możemy ująć w następujący sposób: jest to przeniesienie rzeczywistości w świat matematyki. Zwykle celem takich działań jest przeanalizowanie zachowań różnych układów, czy wyników zachodzących procesów oraz porównanie ich z naszymi przewidywaniami i oczekiwaniami. Nawet jeżeli model nie jest dobrze odwzorowany i konkretne rezultaty znacznie różnią się od tych pożądaných, to zawsze istnieje możliwość przebudowy modelu i rozpoczęcia analizy od początku.

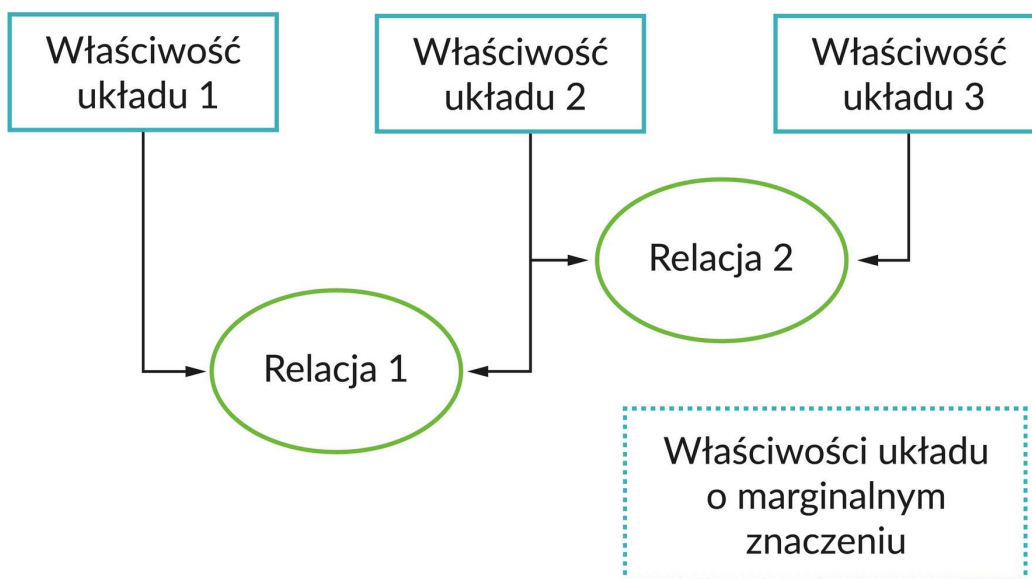
Zwykle modele matematyczne są znacznie uproszczone w porównaniu do ich wzorców w rzeczywistości. Pomniejsze, niewiele znaczące elementy danego procesu lub układu, często nie są uwzględniane. Wynika to z faktu, że ich wpływ na działanie modelu jest nieznaczny, natomiast ich zastosowanie niesie ze sobą ryzyko pojawienia się dodatkowych błędów. Oczywiście osiągnięcie drugiej skrajności i stworzenie zbyt ogólnego i uproszczonego modelu również dalekie jest od ideału. W dużej mierze na konstrukcję naszego modelu wpływa posiadana przez nas ilość informacji oraz wiedza o tym, które elementy wycinka rzeczywistości są znaczące dla naszych wyników.

Skoro wiemy już, czym właściwie jest model matematyczny, zastanówmy się jak takowy stworzyć. Z pewnością niezbędna jest analiza opisywanego elementu rzeczywistości, tak aby dowiedzieć się, jakie informacje musimy uwzględnić oraz jakie relacje pomiędzy nimi zachodzą. W ten sposób będziemy w stanie określić **zmienne** (odpowiadające naszym informacjom) oraz np. funkcje (spełniające rolę relacji) występujące w konstruowanym modelu.

Przeprowadzając odpowiednie matematyczne działania czy manipulując wartościami naszych zmiennych, możemy odwzorowywać rzeczywiste sytuacje, a także zbierać konkretne wyniki, które następnie poddamy analizie.

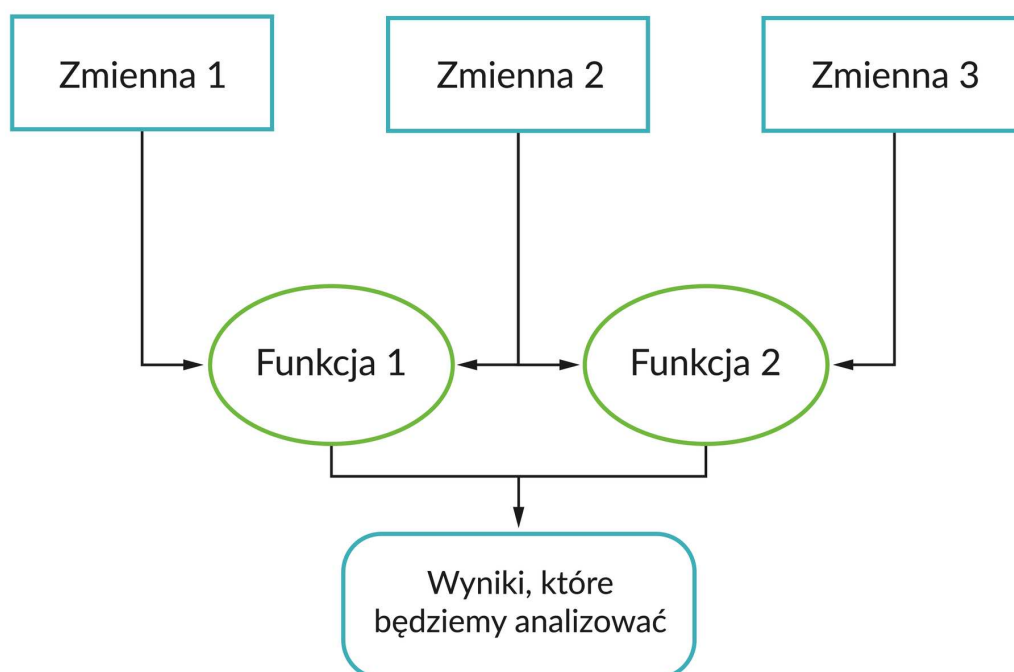
Przykład 1

Założmy, że planujemy przeprowadzić modelowanie matematyczne dla pewnego, rzeczywistego układu. Posiada on grupę różnych właściwości, jednakże tylko trzy z nich mają znaczący wpływ na interesujące nas wyniki. Po przeprowadzonej analizie oceniliśmy, że pomiędzy pierwszą i drugą oraz drugą i trzecią właściwością zachodzą pewne relacje. Przeanalizowana sytuacja prezentuje się następująco:



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Kolejnym krokiem będzie przeniesienie przedstawionej sytuacji do świata matematyki. Nasze trzy właściwości zostaną zaprezentowane w postaci zmiennych, natomiast relacje przemienimy na funkcje je odwzorowujące. Pozostałe właściwości układu mają marginalne znaczenie dla naszych wyników, więc nie będziemy ich uwzględniać. Po skonstruowaniu modelu możemy już odpowiednio manipulować zmiennymi, tak by otrzymać interesujące nas rezultaty. Następnie poddamy je analizie.



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Metoda Monte Carlo

Ciekawym przykładem modelowania matematycznego jest **metoda Monte Carlo**. Służy ona do tworzenia modeli bardzo skomplikowanych procesów, głównie matematycznych – np. całkowania. Co istotne, zmienne opisujące model w przypadku metody Monte Carlo są zawsze dobierane losowo. Warto zaznaczyć, że opisywane modelowanie jest istotne nie tylko dla matematyków. Biznesmeni i ekonomiści wykorzystują je do zarządzania ryzykiem rynkowym, dzięki czemu są w stanie lepiej ocenić swoje szanse na ewentualne straty w różnych warunkach.

Ważne!

Metodę Monte Carlo możemy wykorzystać również do obliczania wartości liczby π !

Liczba pi

Jak wiadomo liczba pi to stała będąca stosunkiem obwodu koła O do długości jego średnicy d .

$$\pi = \frac{O}{d}$$

Zazwyczaj podczas obliczeń przyjmujemy jej przybliżoną wartość równą 3,14, chociaż obecnie znamy ją z dokładnością określaną w trylionach miejsc po przecinku. Zwykle przedstawiana jest z użyciem greckiej litery π . Przybliżmy sobie historię tej liczby oraz metody jej wyznaczania.

Ciekawostka

Dopiero około 300 lat temu walijski matematyk William Jones wprowadził do użytku symbol π , który następnie spopularyzowany został przez szwajcarskiego uczonego Leonharda Eulera.

Ciekawostka

14 marca, w dniu urodzin Alberta Einsteina obchodzimy święto liczby pi.

W amerykańskim systemie zapisu dat miesiąc zajmuje pozycję przed dniem. Wspomniana data zapisywana jest jako 3.14, czyli tyle ile wynosi przybliżona wartość liczby pi.

Historia liczby pi

Historia liczby pi sięga tysięcy lat wstecz i operowali nią już starożytni Babilończycy oraz Egipcjanie. Nawet w starym testamencie, przy opisie wznoszenia świątyni Salomona znajdziemy wzmianki sugerujące, że ówczesna ludność zdawała sobie sprawę z istnienia opisywanej stałej, a za jej wartość przyjmowała cyfrę 3. Trochę dokładniejsi byli Egipcjanie przyjmujący wartość około 3,16.

Wielki krok naprzód poczynił w III wieku p.n.e. Archimedes, któremu udało się poprawnie obliczyć wartość liczby pi do dwóch miejsc po przecinku. Uczynił to, **aproksymując** koło 96-kątami foremnymi – wyliczył obwody takiego wielokąta wpisanego w koło i opisanego na kole. Pomiedzy obliczonymi wartościami znajdowała się liczba pi.

W pierwszych wiekach naszej ery prym w zwiększaniu dokładności obliczeń wiedli Chińczycy. W III wieku Liu Hui uzyskał wartość liczby pi do czterech miejsc po przecinku, natomiast 200 lat później jego rodak Zu Chongzhi poszerzył znane rozwinięcie o trzy kolejne miejsca.

Prawdziwy przełom zanotował natomiast szesnastowieczny niemiecko-holenderski uczyony Ludolph van Ceulen, który obliczył opisywaną stałą z dokładnością do 35 miejsc po przecinku. Jego wynik był oczywiście poprawiany w następnych latach, a obecnie kolejni pasjonaci liczby pi biją rekordy w szacowaniu dokładności zapisu – do dziesiątek trylionów miejsc po przecinku.

Ciekawostka

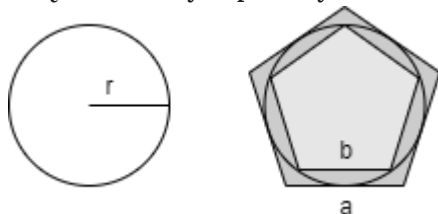
Liczba pi często nazywana jest **Ludolfiną** od imienia niemiecko-holenderskiego matematyka Ludolpha van Ceulena, który wyznaczył ją z dokładnością do 35 miejsc po przecinku.

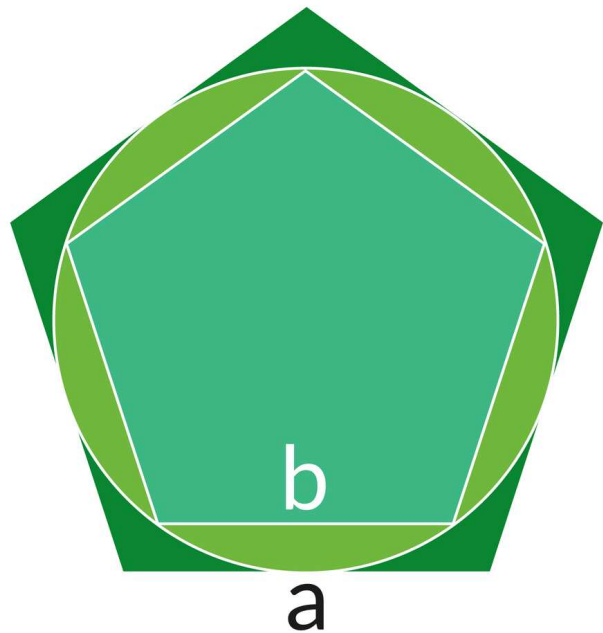
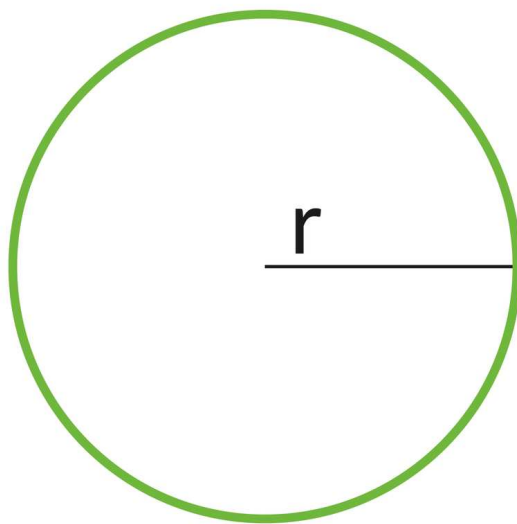
Wyznaczanie liczby pi

Metod wyznaczania liczby pi jest wiele i w historii matematyki zmieniały się one niejednokrotnie. Niegdyś wykorzystywano głównie wielokąty foremne, jeden wpisany w koło, drugi opisany na kole. W ten sposób uzyskiwano przedział, w którym zawarta była wartość π . Im więcej kątów miał wielokąt, tym dokładniejszy wynik otrzymywaliśmy.

Przykład 2

Załóżmy, że posiadamy koło o promieniu r oraz pięciokąt foremny opisany na tym kole (długość boku a), a także pięciokąt foremny wpisany w to koło (długość boku b).





Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Nasz przedział ograniczający wartość liczby pi będzie prezentował się następująco:

$$\left(\frac{5b}{2r}; \frac{5a}{2r} \right)$$

Nie tylko z użyciem geometrii możemy wyznaczać wartość liczby pi, możliwe jest również skorzystanie z m.in. ciągów. Jako przykład posłuży nam pochodzący z 1674 roku naprzemienny szereg Leibnitz.

Przykład 3

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Podany sposób jest wygodniejszy i szybszy od poprzedniej metody z użyciem wielokątów, jednakże nie jest on idealny. W celu uzyskania większej dokładności (rzędu ok. 10 miejsc po przecinku) musimy wykonać dziesiątki tysięcy zsumowań. W czasach, gdy nie było kalkulatorów, takie obliczenia mogły zająć nawet miesiące czy lata.

Obecnie obliczanie liczby pi odbywa się za pośrednictwem programów komputerowych, takich jak np. *y-cruncher*. Do osiągnięcia wspomnianych wcześniej niebotycznych dokładności jest wymagany przede wszystkim odpowiedni sprzęt.

Ciekawostka

W 1888 roku wiejski lekarz ze stanu Indiana - Edwin Goodwin ogłosił, że dzięki nadprzyrodzonym mocom jest w stanie określić dokładną miarę koła. Dążył nawet do

wprowadzenia ustawy obejmującej jego wyniki matematyczne prawami autorskimi. Ostatecznie jego dążenia zostały przerwane przez profesora matematyki, który stwierdził, że otrzymane przez lekarza rezultaty nie są zgodne ze znaną wartością liczby π .

Słownik

aproksymacja

przybliżenie rozwiązania wybranego, często skomplikowanego problemu np. przebiegu zjawiska fizycznego. Opisywany problem przedstawiamy zazwyczaj jako funkcję nazywaną funkcją aproksymowaną, natomiast jej przybliżenie to tzw. funkcja aproksymująca. Głównym celem aproksymacji jest uproszczenie problemów, których rozwiązywanie jest utrudnione lub uniemożliwione ze względu np. na niedostateczne narzędzia analityczne. Przeprowadzone przybliżenia powinny nie tylko zmniejszać złożoność rozpatrywanego problemu, ale jednocześnie gwarantować określoną, wystarczającą dokładność wyników. Efektem ubocznym procesu aproksymacji są błędy aproksymacji.

zmienna

w matematyce jest to symbol reprezentujący wartość, która może ulegać zmianom. Same zmiany oraz ewentualny przedział wartości (które może przyjmować zmienna) zależne są od rozpatrywanego problemu lub eksperymentu, w którego przestrzeni funkcjonuje dana zmienna. Jednym z najprostszych przykładów zmiennej mogą być argument i wartość funkcji.

Aplet

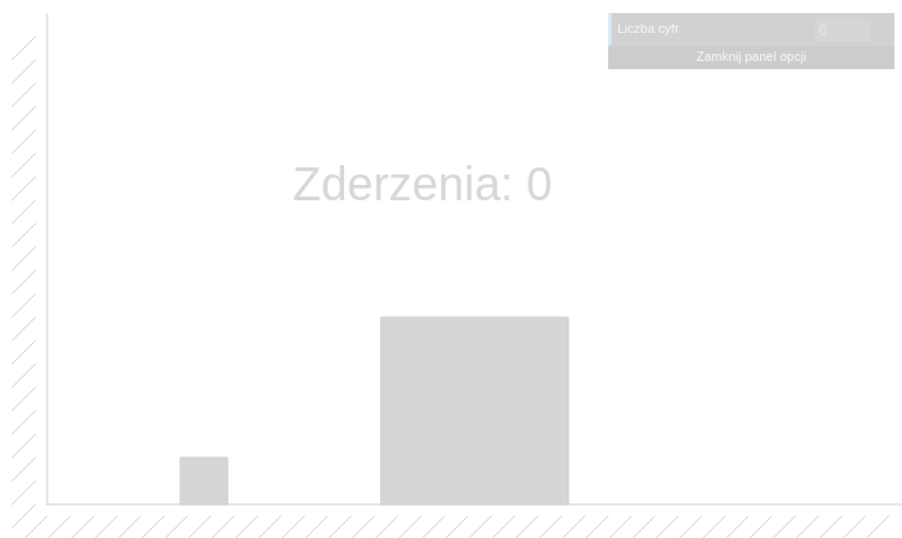
Polecenie 1

Początkowe cyfry dokładnego rozwinięcia liczby π można zauważyć w idealnie sprężystych zderzeniach dwóch klocków. Klocki te zderzają się ze ścianą i ze sobą nawzajem. Jeśli stosunek masy dwóch klocków jest n -tą potęgą liczby 100, to liczba kolizji wygeneruje n pierwszych cyfr rozwinięcia liczby π . Jest to jeden z najbardziej zaskakujących wyników uzyskanych w wyniku symulacji kinematycznych.

Uruchom aplet przedstawiający symulację zderzeń idealnie sprężystych dwóch klocków. Sprawdź, czy uzyskany wynik rzeczywiście pokrywa się z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby π .

Obsługa symulacji:

W polu z etykietą *Liczba cyfr* możesz wprowadzić z klawiatury pożądaną liczbę cyfr rozwinięcia n z przedziału $[1, 9]$. Swoój wybór zatwierdzasz przyciskiem enter – uruchomi on ponowną symulację zderzenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOxZSIFLa>

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wstaw odpowiednie słowa w tekst, aby powstałe zdania były prawdziwe.

Modelowanie służy do przedstawiania za pomocą .

liczby pi

wielokątów foremnych

rzeczywistości

języka matematycznego

matematyczne

Ćwiczenie 2



Wskaż, które z podanych postaci związane były z liczbą pi.

☐ Euklides

☐ Carl Friedrich Gauss

☐ Ludolph van Ceulen

☐ Liu Hui

☐ Archimedes

Ćwiczenie 3



Wskaż, jak inaczej nazywa się liczbę pi.

☐ Liczba van Ceulena

☐ Ludolfina

☐ Liczba Archimedesesa

☐ Leopoldina

Ćwiczenie 4



Wskaż, kiedy obchodzimy święto liczby pi.

☐ 4 października

☐ 3 marca

☐ 14 marca

☐ w dniu urodzin Alberta Einsteina

Ćwiczenie 5



Wskaż prawidłowe dokończenie zdania.

Przy wyznaczaniu wartości liczby pi z użyciem wielokątów foremnych...

większa liczba kątów figury zapewnia mniejszą dokładność otrzymanej wartości. ☐

większa liczba kątów figury zapewnia większą dokładność otrzymanej wartości. ☐

liczba kątów figury nie ma wpływu na dokładność otrzymanej wartości. ☐

Ćwiczenie 6



Połącz przedstawione postacie z informacją o tym, z jaką dokładnością wyznaczyły liczbę pi.

Ludolph van Ceulen

2 miejsca po przecinku

Zu Chongzhi

35 miejsc po przecinku

Archimedes

7 miejsc po przecinku

Liu Hui

5 miejsc po przecinku

Ćwiczenie 7



Wskaż, co przedstawia wzór.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- ☐ szereg d'Alemberta
- ☐ szereg Archimedesesa
- ☐ naprzemienny szereg Leibnitza
- ☐ szereg geometryczny

Ćwiczenie 8



Wskaż, które zdanie na temat modelowania matematycznego jest nieprawdziwe.

- ☐ Model matematyczny musi uwzględniać każdy, nawet najmniejszy szczegół opisywanego zjawiska.
- ☐ Przedstawienie rzeczywistości z użyciem modeli matematycznych często bywa uproszczone.
- ☐ Pomiędzy danymi rzeczywistego układu mogą zachodzić konkretne relacje.
- ☐ W modelu matematycznym właściwości rzeczywistego układu prezentowane są w postaci zmiennych.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Wstęp do modelowania matematycznego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

h) metodę Monte Carlo (obliczanie przybliżonej wartości liczby π , symulacja ruchów Browna),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Wyjaśnisz, czym jest modelowanie matematyczne.

- Przedstawisz historię oraz ciekawostki o liczbie π
- Przeanalizujesz, w jaki sposób wyznacza się liczbę π .

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- metody aktywizujące (burza mózgów).

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie przygotowują ciekawostki dotyczące liczby π , jej obecności w sztuce, przyrodzie etc.
2. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Wstęp do modelowania matematycznego”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Uczniowie porównują znalezione przez siebie ciekawostki dotyczące liczby π ; zapisują je na tablicy w formie mapy myśli.
2. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
3. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią swoje pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Przeczytaj”. Na forum klasy uczniowie analizują przedstawione w niej Przykłady 1, 2 i 3.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z jego treścią. Zapisują ewentualne problemy i pytania. Po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe treści.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Liga zadaniowa – uczniowie wykonują indywidualnie na czas ćwiczenia nr 1–8 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel raz jeszcze wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W odniesieniu do ich realizacji dokonuje szczegółowej oceny rozwiązania zastosowanego przez wybranego ucznia.

Praca domowa:

1. Uczniowie przygotowują notatkę na temat tego, jak modelowanie matematyczne jest wykorzystywane w biologii, ekonomii lub fizyce.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.