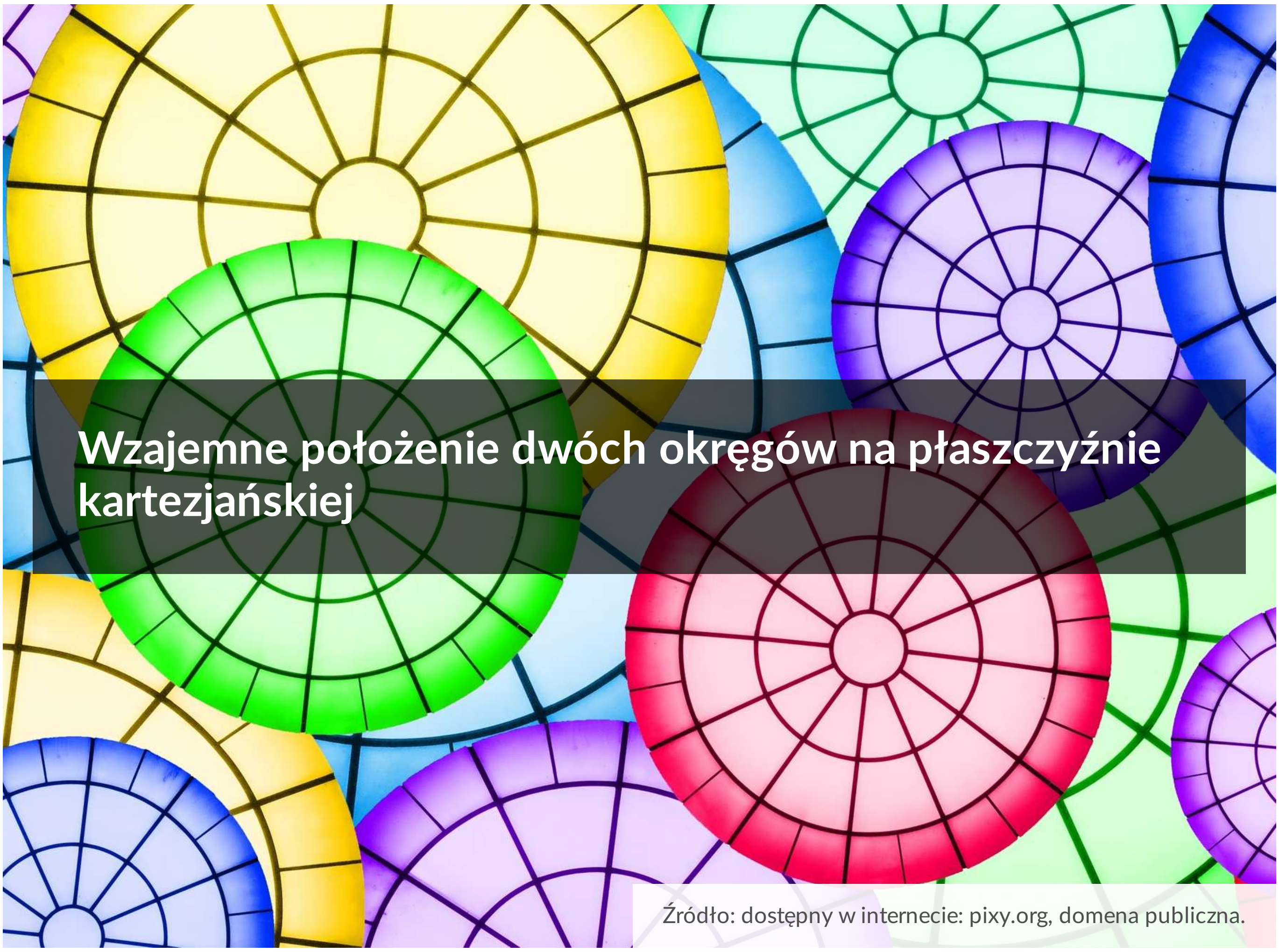
Wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: pixy.org, domena publiczna.

W ilu punktach mogą przecinać się dwa okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej? Czy możliwe jest, aby dwa okręgi przecinały się w trzech lub nieskończenie wielu punktach? W tej lekcji poznamy odpowiedzi na te pytania. Bazując na części teoretycznej oraz przedstawionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz wzajemne położenie okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej.
- Wyznaczysz warunki, jakie muszą spełniać odległości między środkami oraz długości promieni tak, aby okręgi były styczne, przecinające się lub rozłączne.
- Obliczysz wartości parametrów w badaniu wzajemnego położenia okręgów.

Przeczytaj

Okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej opisujemy za pomocą równania. Wyróżniamy dwie postacie tego równania:

- równanie okręgu w postaci ogólnej $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie promień okręgu obliczamy ze wzoru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, zaś punkt $S = (a, b)$ jest środkiem okręgu,
- równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie r nazywamy promieniem okręgu, zaś punkt $S = (a, b)$ środkiem okręgu.

Wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej

Załóżmy, że mamy dane dwa okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej. Wprowadźmy oznaczenia:

S_1, S_2 - środki okręgów,

r_1, r_2 - promienie okręgów.

1. Okręgi styczne wewnętrznie lub zewnętrznie.

Okręgi są styczne wewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest równa wartości bezwzględnej różnicy ich promieni:

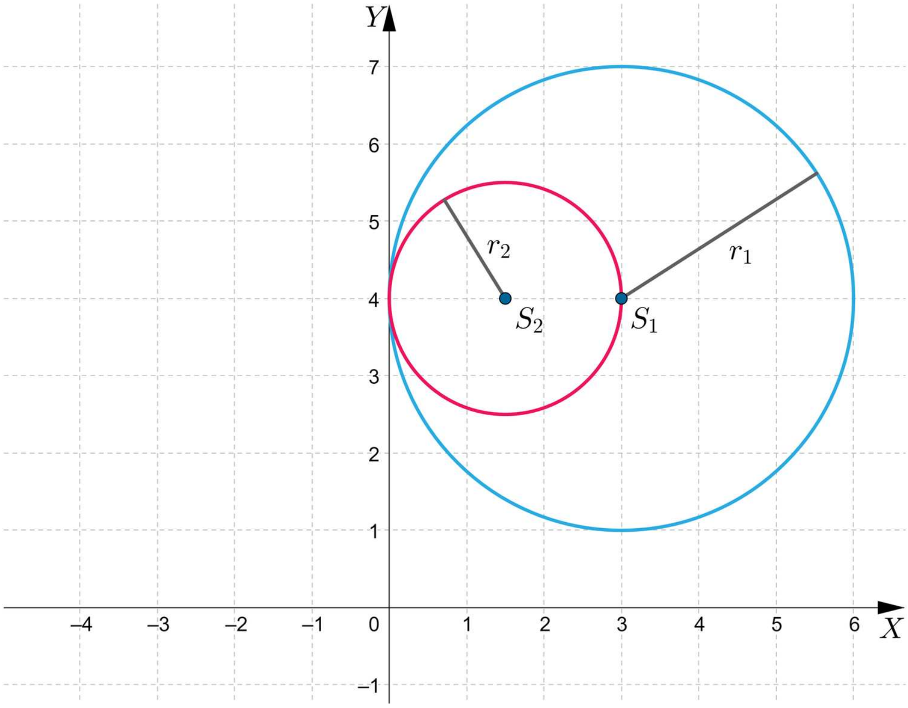
$|S_1S_2| = |r_2 - r_1|$.

Na rysunku przedstawiono okręgi styczne wewnętrznie o równaniach:

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ oraz $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$, skąd otrzymujemy:

$S_1 = (3, 4)$ oraz $r_1 = 3$,

$S_2 = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ oraz $r_2 = \frac{3}{2}$.



Okręgi są styczne zewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest równa sumie ich promieni:

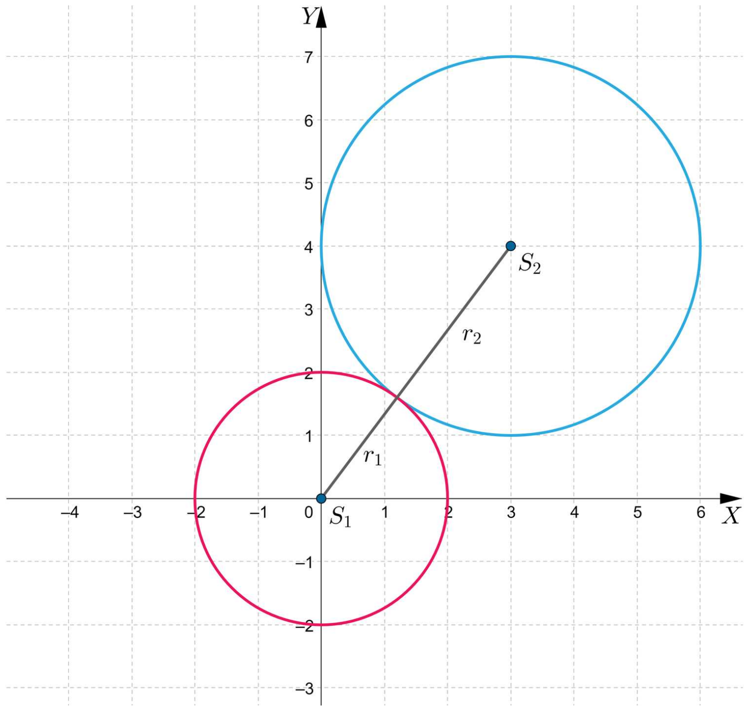
$|\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2| = r_1 + r_2$.

Na rysunku przedstawiono okręgi styczne zewnętrznie o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ oraz $x^2 + y^2 = 4$, skąd otrzymujemy

$S_1 = (0, 0)$ oraz $r_1 = 2$,

$S_2 = (3, 4)$ oraz $r_2 = 3$,



2. Okręgi rozłączne wewnętrznie lub zewnętrznie.

Okręgi są rozłączne wewnętrznie, gdy odległość pomiędzy ich środkami jest mniejsza niż wartość bezwzględna różnicy ich promieni:

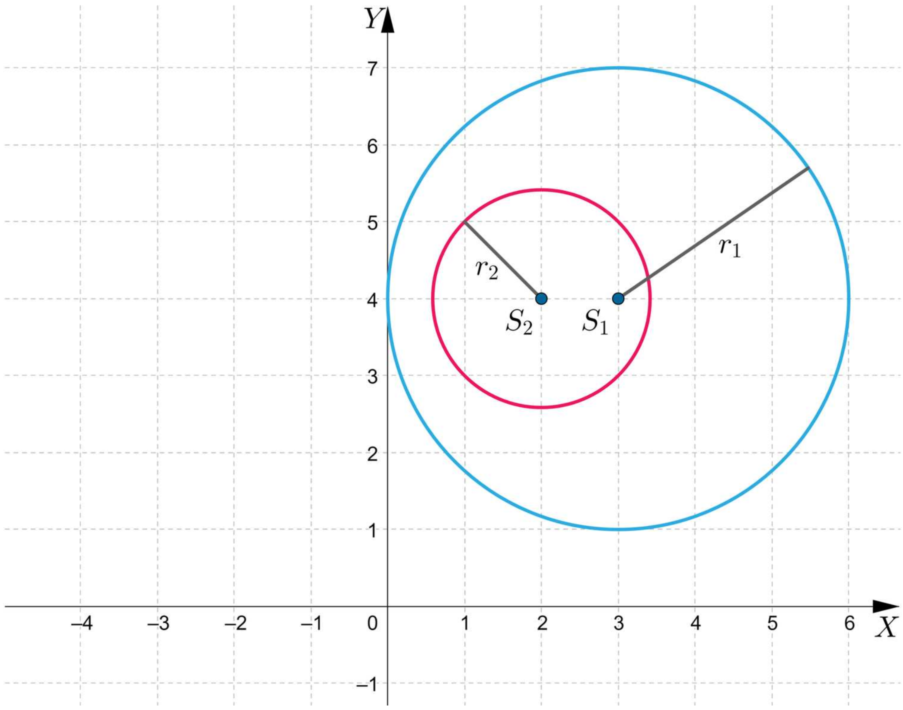
$|S_1S_2| < |r_2 - r_1|$.

Na rysunku przedstawiono okręgi rozłączne wewnętrznie o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ oraz $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2$, skąd otrzymujemy

$S_1 = (3, 4)$ oraz $r_1 = 3$,

$S_2 = (2, 4)$ oraz $r_2 = \sqrt{2}$.



Okręgi są rozłączne zewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest większa niż suma ich promieni:

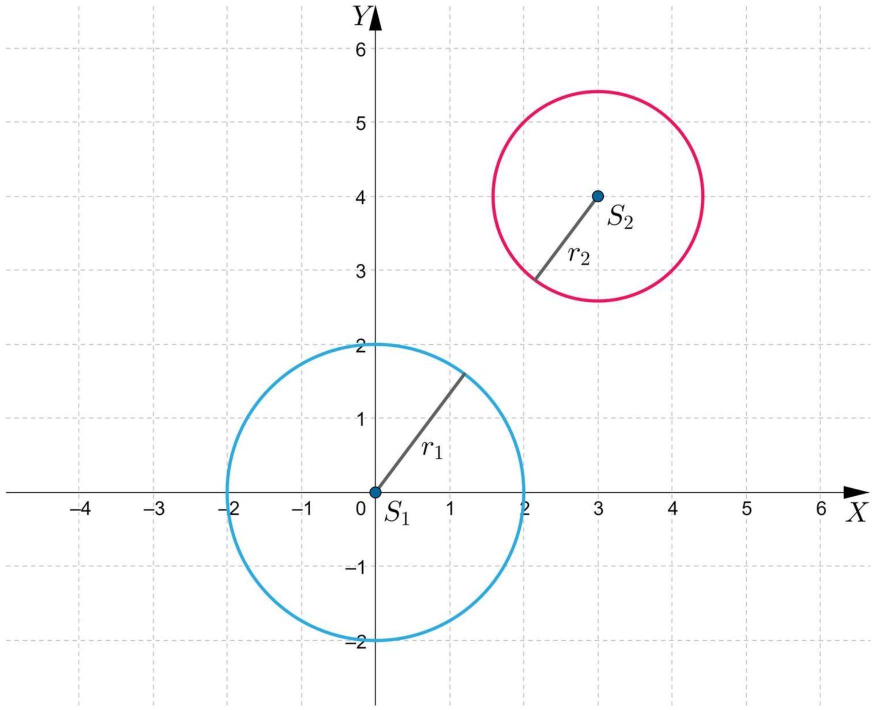
$|S_1S_2| > r_1 + r_2$

Na rysunku przedstawiono okręgi rozłączne zewnętrznie o równaniach:

$x^2 + y^2 = 4$ oraz $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$, skąd otrzymujemy

$S_1 = (0, 0)$ oraz $r_1 = 2$,

$S_2 = (3, 4)$ oraz $r_2 = \sqrt{2}$.



3. Okręgi przecinające się.

Okręgi przecinają się w dwóch punktach, gdy odległość między środkami okręgów jest większa od wartości bezwzględnej różnicy ich promieni i mniejsza od sumy ich promieni:

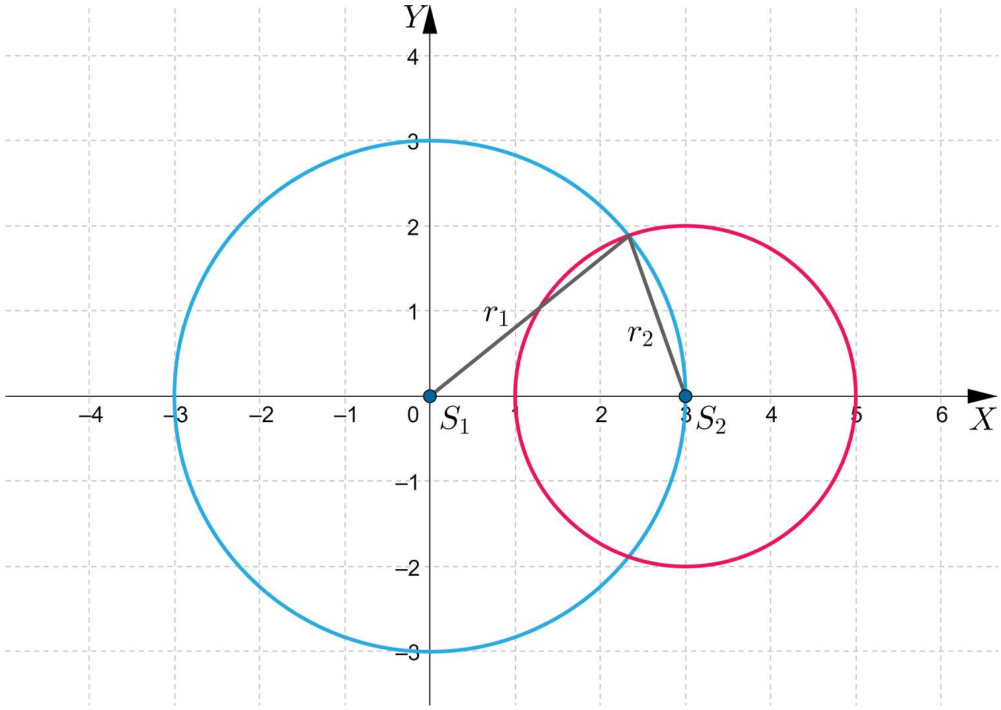
$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$

Na rysunku przedstawiono okręgi przecinające się o równaniach:

$(x-3)^2 + y^2 = 4$ oraz $x^2 + y^2 = 9$, skąd otrzymujemy

$S_1 = (0, 0)$ oraz $r_1 = 3$,

$S_2 = (3, 0)$ oraz $r_2 = 2$.



Z opisanych wyżej możliwości wzajemnego położenia dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej wynika pewna własność.

Własność: Liczba punktów wspólnych dwóch okręgów.

Dwa okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej mają:

- 0 punktów wspólnych, gdy są rozłączne wewnętrznie lub zewnętrznie,
- 1 punkt wspólny, gdy są styczne wewnętrznie lub zewnętrznie,
- 2 punkty wspólne, gdy się przecinają,
- nieskończenie wiele punktów wspólnych, gdy się pokrywają.

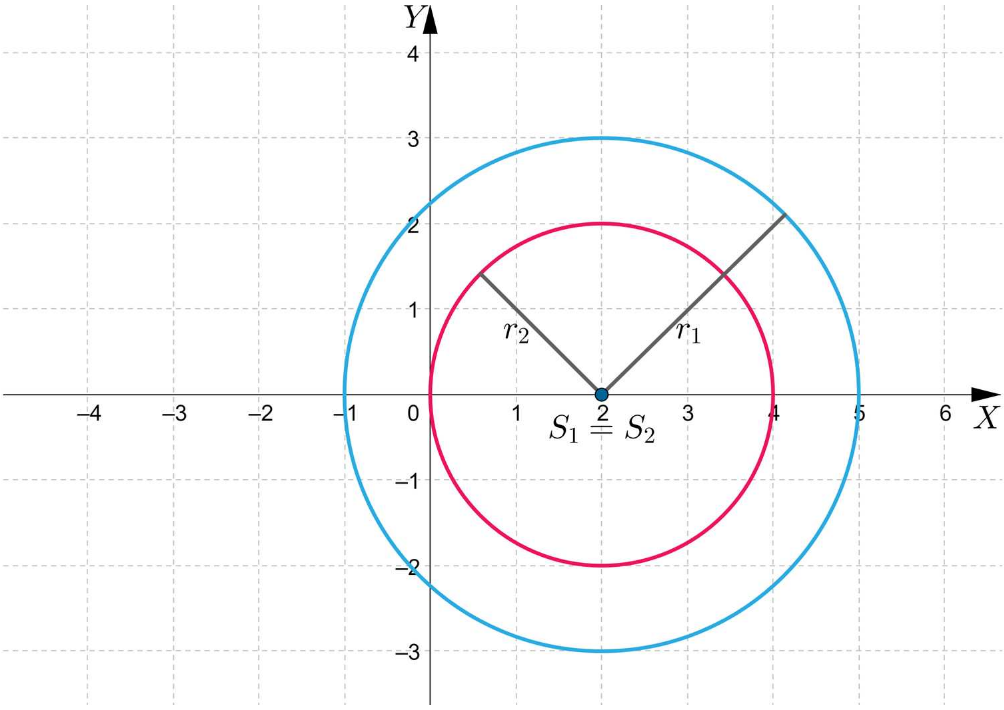
Ciekawostka

Okręgi o wspólnym środku nazywamy okręgami współśrodkowymi. Zaliczamy je do grupy okręgów rozłącznych.

Na rysunku przedstawiono okręgi o równaniach:

$(x-2)^2+y^2=9$ oraz $(x-2)^2+y^2=4$, skąd otrzymujemy

$S_1=S_2=(2,0)$, $r_1=2$ i $r_2=3$.



Do analizy wzajemnego położenia okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej wykorzystamy wzór na odległość dwóch punktów o współrzędnych $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Wówczas: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Przykład 1

Zbadamy wzajemne położenie okręgów zadanych równaniami w postaci kanonicznej: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ i $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Rozwiązanie:

Ustalmy środki i promienie okręgów. Mamy:

$S_1 = (-2, 0)$ oraz $r_1 = 2$,

$S_2 = (-1, 4)$ oraz $r_2 = \sqrt{5}$.

Obliczmy odległość pomiędzy środkami tych okręgów:

$|S_1S_2| = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$.

Wyznaczmy sumę oraz różnicę promieni:

$r_1 + r_2 = 2 + \sqrt{5}$ oraz $r_2 - r_1 = \sqrt{5} - 2$.

Ponieważ zachodzi warunek $|r_2 - r_1| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$, zatem okręgi przecinają się w dwóch punktach.

Przykład 2

Zbadamy wzajemne położenie okręgów zadanych równaniami:
$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$ oraz $x^2 + 4x + y^2 - 4y + 7 = 0$.

Rozwiązanie:

Równanie pierwszego okręgu możemy zapisać w postaci $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$,
a drugiego okręgu w postaci $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Środki i promienie tych okręgów wynoszą odpowiednio:

$S_1 = (1, -1)$ oraz $r_1 = 2$,

$S_2 = (-2, 2)$ oraz $r_2 = 1$.

Obliczmy odległość pomiedzy środkami tych okręgów:

$|S_1 S_2| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$.

Zauważmy, że $r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3$.

Ponieważ zachodzi warunek $|S_1 S_2| > r_1 + r_2$, zatem okręgi są rozłączne zewnętrznie.

Jeżeli mamy dane równanie okręgu w postaci ogólnej, wówczas możemy wyznaczyć jego środek i promień, korzystając ze wzorów.

Przykład 3

Zbadamy wzajemne położenie okręgów zadanych równaniami: $x^2 + (y+1)^2 = 4$ oraz
$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 20 = 0$.

Rozwiązanie:

Środek oraz promień pierwszego okręgu wynoszą:

$S_1 = (0, -1)$ i $r_1 = 2$.

Do wyznaczenia środka i promienia drugiego okręgu wykorzystamy wzór na równanie okręgu w postaci ogólnej $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ oraz wzór na promień
$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Otrzymujemy:

$-2a = 4$ oraz $-2b = -2$, co daje $a = -2$ i $b = 1$

Środek okręgu ma zatem współrzędne $S_2 = (-2, 1)$.

Promień okręgu obliczymy po podstawieniu do wzoru:

$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 20} = \sqrt{25} = 5$

Obliczmy odległość pomiędzy środkami tych okręgów:

$|S_1S_2| = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$

Zauważmy, że $|r_2 - r_1| = 5 - 2 = 3$.

Ponieważ $|S_1S_2| < |r_2 - r_1|$, zatem okręgi są rozłączne wewnętrznie.

Mając dane równanie okręgu z parametrem, możemy wyznaczyć jego wartość, jeżeli wiemy, czy okręgi są styczne, przecinające się lub rozłączne.

Przykład 4

Wyznaczymy, dla jakiej wartości parametru m okręgi o równaniach $(x-2)^2 + y^2 = 9$ i $x^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = m^2 - 1$ są styczne zewnętrznie.

Z podanych równań możemy odczytać środki oraz promienie okręgów.

Zatem:

$S_1 = (2, 0)$ oraz $r_1 = 3$

$S_2 = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$ oraz $r_2 = \sqrt{m^2 - 1}$.

Z warunku, że promień okręgu jest zawsze większy od 0 otrzymujemy nierówność:

$m^2 - 1 > 0$, zatem $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Jeżeli okręgi są styczne zewnętrznie, to prawdziwy jest warunek:

$|S_1S_2| = r_1 + r_2$

Obliczmy odległość pomiędzy środkami tych okręgów:

$|S_1S_2| = \sqrt{(0-2)^2 + \left(2\sqrt{3} - 0\right)^2} = 4$

Do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$4 = \sqrt{m^2 - 1} + 3$, czyli $m^2 = 2$.

Rozwiązaniami równania są liczby $\sqrt{2}$ lub $-\sqrt{2}$.

Okręgi są styczne zewnętrznie, gdy $m = \sqrt{2}$ lub $m = -\sqrt{2}$.

W celu wyznaczenia punktów wspólnych dwóch okręgów rozwiązujemy układ równań kwadratowych.

Przykład 5

Wyznaczymy punkty wspólne okręgów określonych równaniami $(x-1)^2+y^2=9$ oraz $x^2+(y+1)^2=5$.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia punktów wspólnych tych okręgów rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=9\\ x^2+(y+1)^2=5\end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases}x^2-2x+1+y^2=9\\ x^2+y^2+2y+1=5\end{cases}$$

Jeżeli równania odejmiemy stronami, to otrzymujemy równanie $2x+2y=-4$, czyli $y=-x-2$.

Po podstawieniu tego wyrażenia do pierwszego równania otrzymujemy równanie $x^2-2x+1+(-x-2)^2=9$, które przekształcamy do postaci $x^2+x-2=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $x_1=-2$ lub $x_2=1$.

Zatem okręgi mają dwa punkty wspólne, których drugie współrzędne wynoszą odpowiednio $y_1=0$ oraz $y_2=-3$.

Okręgi przecinają się w punktach o współrzędnych $(-2,0)$ oraz $(1,-3)$.

Słownik

równanie okręgu w postaci ogólnej

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, gdzie promień okręgu obliczamy ze wzoru $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ i $a,b,c\in R$ oraz $S=(a,b)$ - środek okręgu

równanie okręgu w postaci kanonicznej

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, gdzie r - promień okręgu, $S=(a,b)$ - środek okręgu

Aplet

Polecenie 1

Zbadaj wzajemne położenie okręgów o wybranych przez Ciebie środkach i promieniach, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DivNpW18d

Polecenie 2

Zbadaj wzajemne położenie okręgów o środkach i promieniach odpowiednio: $S_1 = (-5, -3)$, $S_2 = (7, 2)$, $r_1 = 7$, $r_2 = 5$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

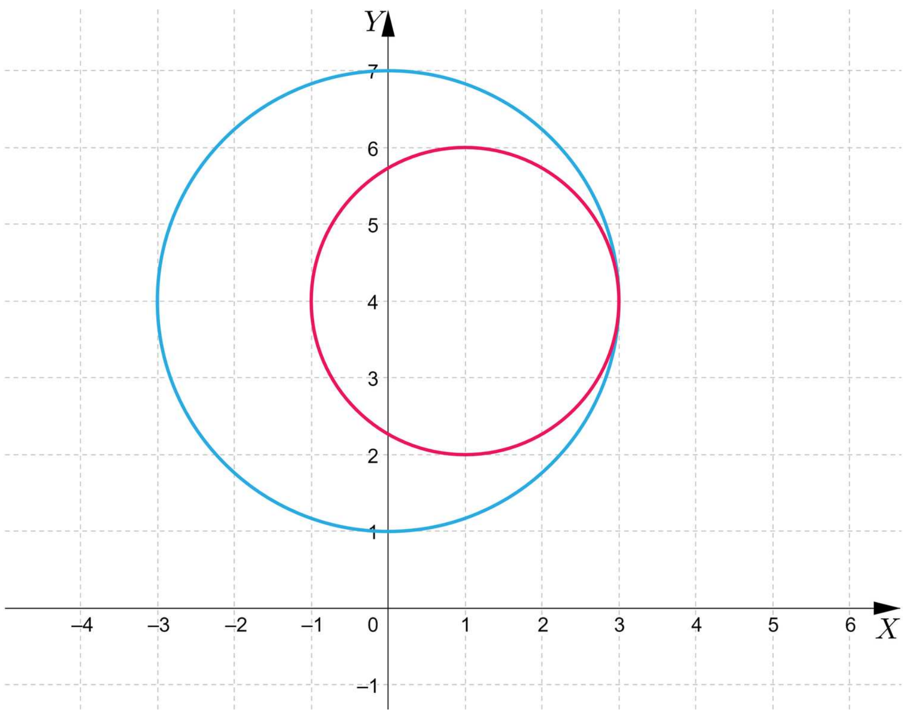
Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Przyjrzyj się okręgom na rysunku poniżej, a następnie wybierz zdania opisujące ich wzajemne położenie.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dane są dwa okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej o równaniach $x^2 + (y-1)^2 = 1$ oraz $x^2 + (y-3)^2 = m^2$. Dla jakiej wartości parametru $m (m > 0)$ okręgi są:

a) styczne wewnętrznie

b) rozłączne wewnętrznie

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie,
- wyznacza warunki, jakie muszą spełniać odległości między środkami oraz długości promieni tak, aby okręgi były styczne, przecinające się lub rozłączne,
- oblicza wartości parametrów w badaniu wzajemnego położenia okręgów,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 z sekcji „Sprawdź się” na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Zadania - okręgi.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu wzajemnego położenia dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej.