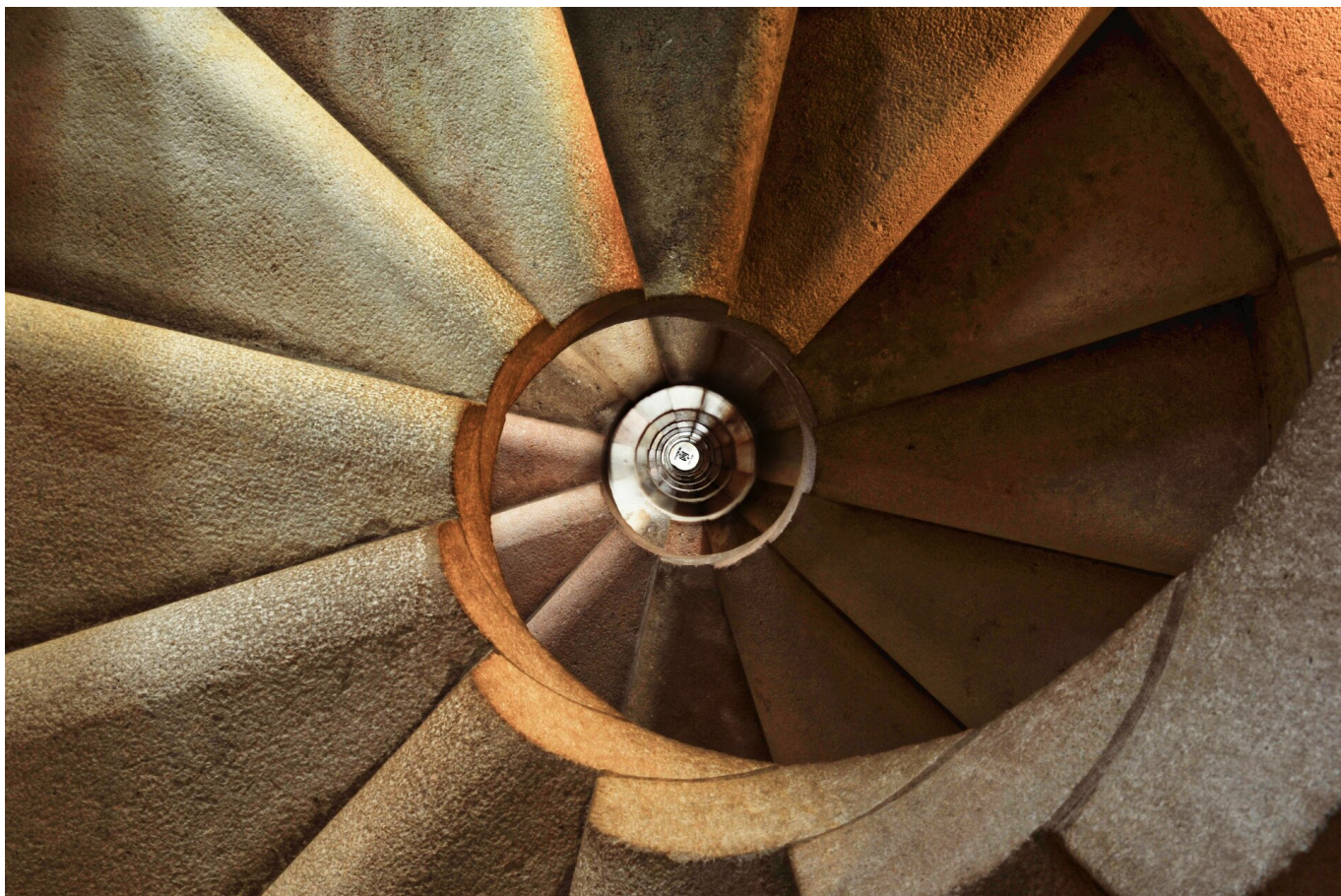




Co to znaczy, że ciąg jest ograniczony?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)





## Co to znaczy, że ciąg jest ograniczony?

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/>, domena publiczna.

Wiemy już co to znaczy, że ciąg jest zbieżny. W tym temacie poznamy kolejną ważną własność ciągu, która jak się później okaże jest w pewien sposób powiązana ze zbieżnością. Dowiemy się mianowicie co to oznacza, że ciąg jest ograniczony. W szczególności poznamy pojęcie ciągu ograniczonego z dołu oraz ograniczonego z góry.

### Twoje cele

- Dowiesz się czym jest ciąg ograniczony,
- Poznasz różnicę między ciągiem ograniczonym z góry i z dołu,
- Wskażesz wśród podanych ciągów te, które są ograniczone.

# Przeczytaj

## Co to jest ograniczenie dolne ciągu?

Rozważmy następujący ciąg

$$a_n = 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy kilka jego wyrazów.

$$a_1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

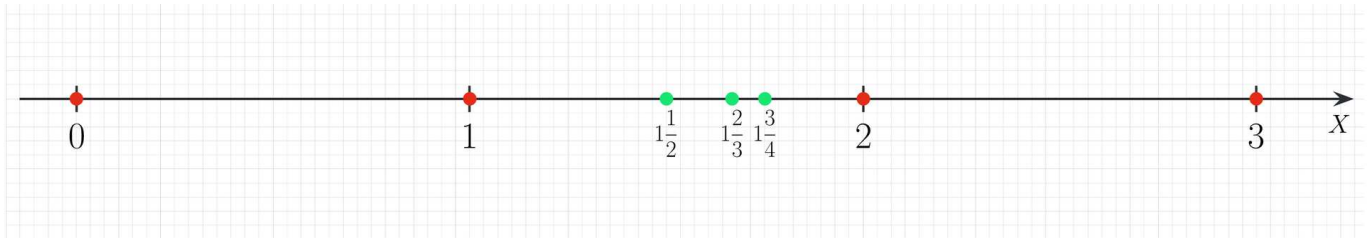
$$a_3 = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

...

$$a_{10} = 2 - \frac{1}{10} = 1\frac{9}{10}$$

Jak możemy zauważyć, da się wskazać taką liczbę rzeczywistą, że wszystkie wyrazy ciągu  $a_n$  są od niej większe lub są jej równe. Taką liczbą jest np. 0. Ilustruje to poniższy rysunek.



Ciągi o powyższej własności nazywamy ciągami ograniczonymi z dołu. Formalną definicję możemy zapisać następująco

### Definicja: Ciąg ograniczony z dołu

Powiemy, że ciąg  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest ograniczony z dołu, jeśli istnieje liczba rzeczywista  $m \in \mathbb{R}$  taka, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$a_n \geq m.$$

### Uwaga!

Liczbę  $m$  z powyższej definicji nazywamy ograniczeniem dolnym ciągu. Jak możemy zauważyć, jeśli pewna liczba rzeczywista  $m$  jest ograniczeniem dolnym ciągu, to jest nim także każda liczba rzeczywista od niej mniejsza. W związku z tym często wyróżnia się liczbę, która jest największym ograniczeniem dolnym ciągu.

Wracając do naszego przykładowego ciągu  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ , możemy zauważyć, że jest to ciąg rosnący. Wynika stąd, że jego największym ograniczeniem dolnym jest jego pierwszy wyraz, czyli 1. Własność tę można zapisać ja poniżej.

#### Własność: Związek monotoniczności ciągu z jego ograniczeniem dolnym

Jeśli ciąg  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest **ciągami rosnącym**, to jest on ograniczony z dołu. Dodatkowo jego największym ograniczeniem dolnym jest jego pierwszy wyraz.

## Czym jest ograniczenie górne ciągu?

Spójrzmy teraz na ciąg  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jego kolejne wyrazy są równe

$$a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

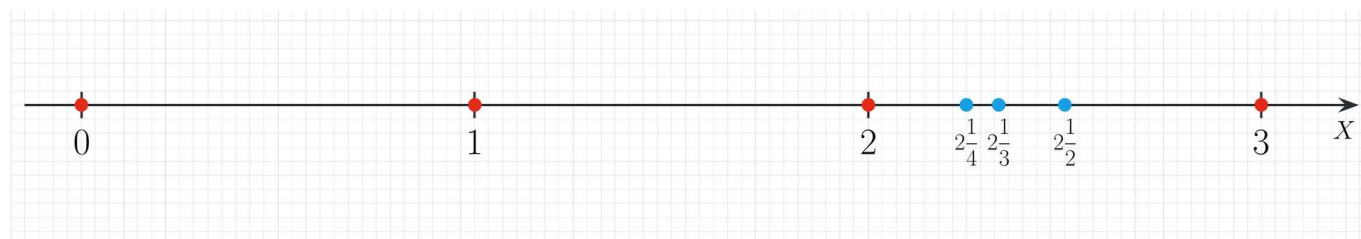
$$a_3 = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$a_4 = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

...

$$a_{10} = 2 + \frac{1}{10} = 2\frac{1}{10}$$

Jak widać ciąg ten jest **ciągami malejącym**. Ponadto łatwo wskazać liczbę taką, że wszystkie wyrazy tego ciągu są od niej mniejsze lub jej równe. Taką liczbą jest np. 3. W takim przypadku mówimy, że ciąg jest ograniczony z góry. Ilustruje to poniższy rysunek.



#### Definicja: Ciąg ograniczony z góry

Powiemy, że ciąg  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest ograniczony z góry, jeśli istnieje liczba rzeczywista  $M \in \mathbb{R}$  taka, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$a_n \leq M.$$

Liczbę  $M$  z powyższej definicji nazywamy ograniczeniem górnym ciągu  $a_n$ . Analogicznie jak w przypadku ograniczenia z dołu widzimy, że jeśli liczba  $M$  jest ograniczeniem górnym pewnego ciągu, to jest też nim każda liczba od niej większa. W związku z tym częsta wyróżnia się liczbę, która jest najmniejszym ograniczeniem górnym danego ciągu. Zachodzi analogiczna własność jak dla ciągów rosnących.

### **Własność: Związek monotoniczności ciągu z jego ograniczeniem górnym**

Jeśli ciąg  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest ciągiem malejącym, to jest on ograniczony z góry. Dodatkowo jego najmniejszym ograniczeniem górnym jest jego pierwszy wyraz.

Jak zauważyliśmy wcześniej ciąg  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$  jest malejący, zatem jego najmniejszym ograniczeniem górnym jest wyraz  $a_1 = 3$ .

## **Czy każdy ciąg jest ograniczony?**

Powróćmy raz jeszcze do pierwszego przykładu, czyli do ciągu  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jak zauważyliśmy ciąg ten jest ograniczony z dołu. Jednak jak widać z jego interpretacji na osi liczbowej jest on też ograniczony z góry. Jego ograniczeniem górnym jest np. liczba 3. Ciągi, które są jednocześnie ograniczone z góry i z dołu nazywamy ciągami ograniczonymi.

### **Definicja: Ciąg ograniczony**

Powiemy, że ciąg  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jest ograniczony, jeśli istnieją liczby rzeczywiste  $m, M \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzą nierówności

$$m \leq a_n \leq M.$$

Innymi słowy ciąg jest ograniczony, jeśli istnieje przedział właściwy (tzn. taki, którego krańcami są liczby rzeczywiste), do którego należą wszystkie wyrazy tego ciągu.

### **Uwaga!**

Istnieje ważny związek między ograniczonością ciągu a jego zbieżnością. Podamy go w kolejnym temacie.

Na koniec spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, czy każdy ciąg jest ograniczony? Rozważmy w tym celu ciąg  $a_n = n$ . Ponieważ wyrazami tego ciągu są wszystkie liczby naturalne więc łatwo widać, że wybierając dowolnie dużą liczbę rzeczywistą  $M$  zawsze znajdziemy wyraz tego ciągu (czyli liczbę naturalną), który jest większy od  $M$ . Zatem ciąg ten nie jest ograniczony z góry a zatem nie jest ograniczony. Ponieważ jest to ciąg rosnący więc jest on ograniczony z dołu. Przykładem ciągu który nie jest ograniczony z dołu jest np. ciąg  $a_n = -n$ . Ciąg ten z kolei jest malejący więc jest ograniczony z góry. Istnieją oczywiście

ciągi, które nie są ograniczone ani z góry ani z dołu. Potrafisz podać przykład takiego ciągu?

## Słownik

### ciąg rosnący

ciąg którego każdy kolejny wyraz jest większy od poprzedniego, tzn. który spełnia warunek  $a_n < a_{n+1}$ , dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

### ciąg malejący

ciąg którego każdy kolejny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, tzn. który spełnia warunek  $a_n > a_{n+1}$ , dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, która przedstawia interpretację graficzną czterech ciągów nieskończonych. Następnie wykonaj poniższe ćwiczenia.

## Polecenie 2

Które z ciągów przedstawionych na infografice są ograniczone z góry, a które z dołu?

## Polecenie 3

Które z ciągów przedstawionych na infografice są ograniczone?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Który z podanych ciągów **nie** jest ograniczony z góry?

☐  $a_n = 2n - 1$

☐  $a_n = \frac{2}{n}$

☐  $a_n = 1$

☐  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

## Ćwiczenie 2



Który z podanych ciągów **nie** jest ograniczony z dołu?

☐  $a_n = -2$

☐  $a_n = 3n$

☐  $a_n = \frac{1-n}{n}$

☐  $a_n = 1 - n$



### Ćwiczenie 3



Wśród podanych ciągów wskaż ciągi ograniczone z dołu.

☐  $a_n = \frac{n+1}{2}$

☐  $a_n = 1 - 2n$

☐  $a_n = -4$

☐  $a_n = n - 3$

### Ćwiczenie 4



Wśród podanych ciągów wskaż ciągi ograniczone.

☐  $a_n = 5n$

☐  $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

☐  $a_n = \frac{4n}{2n+1}$

☐  $a_n = \frac{2-n}{3}$

## Ćwiczenie 5



Przesuń podane ciągi do odpowiednich miejsc, wskazując czy są ograniczone z góry czy z dołu.

Ciągi ograniczone z dołu

$$a_n = \sqrt{5n-1}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}$$

$$a_n = 4 - n^2$$

$$a_n = 4 - 2n$$

$$a_n = n^2$$

$$a_n = n - 2$$

$$a_n = \frac{1-2n}{3}$$

Ciągi ograniczone z góry

## Ćwiczenie 6



Przesuń podane ciągi do odpowiednich miejsc, wskazując czy są ograniczone czy nie.

Ciągi ograniczone

$$a_n = \frac{2-3n}{1+6n}$$

$$a_n = \frac{n+1}{4n-2}$$

$$a_n = \frac{2n+7}{3}$$

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_n = 3 - n$$

$$a_n = -\frac{2}{n+3}$$

Ciągi nieograniczone

## Ćwiczenie 7



Połącz w pary ciągi ograniczone z góry z ich najmniejszym ograniczeniem górnym. Ciąg który nie jest ograniczony z góry, połącz ze słowem 'brak'.

$$a_n = \frac{6n}{4n-1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2-n}{2}$$

$$3$$

$$a_n = \frac{4}{n}$$

$$2$$

$$a_n = n + 1$$

$$4$$

$$a_n = 4 - n$$

brak

## Ćwiczenie 8



Połącz w pary ciągi ograniczone z dołu z ich największym ograniczeniem dolnym. Ciąg który nie jest ograniczony z dołu, połącz ze słowem 'brak'.

$$a_n = 1 - n$$

$$5$$

$$a_n = \frac{1-n}{2-4n}$$

$$4$$

$$a_n = \frac{3n+1}{n+1}$$

$$0$$

$$a_n = 2n + 3$$

$$2$$

$$a_n = 1 + 3n$$

brak

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Mariusz Doliński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Co to znaczy, że ciąg jest ograniczony?

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne (językiem ucznia):**

- Dowiesz się czym jest ciąg ograniczony,
- Poznasz różnicę między ciągiem ograniczonym z góry i z dołu,
- Wskażesz wśród podanych ciągów te, które są ograniczone.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- metoda przypadków;
- dyskusja.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Co to znaczy, że ciąg jest ograniczony?” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 – „Zapoznaj się z poniższą infografiką, która przedstawia interpretację graficzną czterech ciągów. Następnie wykonaj poniższe ćwiczenia” z sekcji „Infografika”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.



**Materiał pomocnicze:**

- [Badanie własności ciągów](#)
- [Pojęcie ciągu](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Co to znaczy, że ciąg jest ograniczony?”.