Układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

Układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

Źródło: Jatuphon Buraphon, dostępny w internecie: https://pixabay.com/.

Układ równań liniowych z n niewiadomymi ma postać

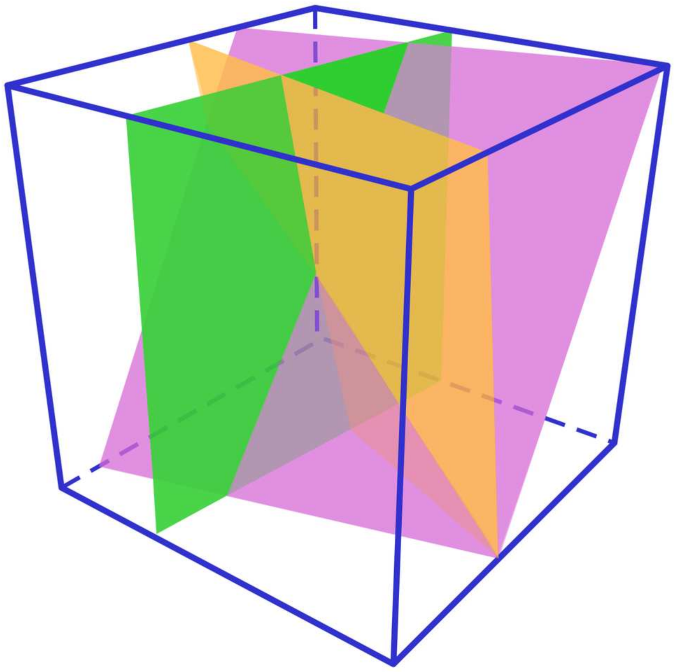
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

gdzie:

x_i dla $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – niewiadome,

a_{ik} dla $i, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ - współczynniki liczbowe przy niewiadomych,

b_i dla $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – wyrazy wolne.



Na rysunku powyżej przedstawiono ilustrację graficzną układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

W tym materiale zajmiemy się algebraicznym sposobem rozwiązania układu trzech równań równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.
- Sprawdzisz, czy dane liczby są rozwiązaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.
- Przedstawisz graficzną ilustrację układu trzech równań pierwszego stopnia z trzema niewiadomymi.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań

Układem równań nazywamy koniunkcję co najmniej dwóch równań.

Aby rozwiązać układ równań, należy znaleźć wszystkie układy liczb spełniające jednocześnie wszystkie równania składowe danego układu równań lub uzasadnić, że takie układy nie istnieją.

Definicja: Układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

Układem trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi nazywamy koniunkcję trzech równań pierwszego stopnia z trzema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

gdzie:
x, y oraz z – oznaczają niewiadome,
$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ oraz c_3 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x, y oraz z, przy czym przynajmniej jedna z trójki liczb a_1 a_2 i a_3, b_1, b_2 i b_3 oraz c_1, c_2 i c_3 jest różna od zera. Liczby d_1, d_2 oraz d_3 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem układu trzech równań równań liniowych z trzema niewiadomymi jest każda uporządkowana trójka liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy trójki liczb $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = -7 \end{cases}$ są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 12 \end{cases}$.

Podstawiamy podane wartości x, y i z do wyrażeń znajdujących się po lewej stronie kolejnych równań składowych, obliczamy ich wartości liczbowe i porównujemy je z wartościami liczbowymi znajdującymi się po prawej stronie tych równań.

Rozpatrzmy trójkę liczb $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

$$L_1 = 2x + 3y - z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-3) = 11 = P_1 \Rightarrow L_1 = P_1$$

$$L_2 = x - y + z = 1 - 2 + (-3) = -4 \neq 0 = P_2 \Rightarrow L_2 \neq P_2$$

Ponieważ w drugim równaniu, po podstawieniu wartości $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ w miejsce niewiadomych, lewa strona nie jest równa stronie prawej, więc ta trójka liczb nie spełnia tego równania.

Nie musimy już sprawdzać, czy spełnia trzecie równanie – aby była rozwiązaniem układu, musi spełniać każde z równań. Trójka liczb $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ nie spełnia drugiego równania, a zatem nie jest rozwiązaniem tego układu równań.

Sprawdźmy trójkę liczb $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2. \\ z = -7 \end{cases}$

Ponownie obliczmy i porównujemy wartości wyrażeń po lewej oraz prawej stronie każdego z równań.

$$L_1 = 2x + 3y - z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) - (-7) = 11 = P_1 \Rightarrow L_1 = P_1$$

$$L_2 = x - y + z = 5 - (-2) + (-7) = 0 = P_2 \Rightarrow L_2 = P_2$$

$$L_3 = -x + 2y - 3z = -5 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-7) = 12 = P_3 \Rightarrow L_3 = P_3$$

Trójka liczb $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ spełnia wszystkie równania tego układu, a zatem jest jego rozwiązaniem.

Przykład 2

Rozwiążemy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi
$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$.

Rozwiązując układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi możemy wyznaczyć jedną z niewiadomych z dowolnego równania. W tym przykładzie wyznaczymy niewiadomą x z trzeciego równania.

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x = 9 + 2y - 2z \end{cases}$$

Wyznaczone wyrażenie podstawiamy do dwóch pierwszych równań w miejsce niewiadomej x.

$$\begin{cases} 2 \cdot (9 + 2y - 2z) - 5y - 3z = 7 \\ 3 \cdot (9 + 2y - 2z) - y + 2z = 4 \\ x = 9 + 2y - 2z \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 18 + 4y - 4z - 5y - 3z = 7 \\ 27 + 6y - 6z - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ równań do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} -y - 7z = -11 \\ 5y - 4z = -23 \end{cases}$$

Aby rozwiązać ten układ, możemy zastosować metodę przeciwnych współczynników.

Mnożąc obie strony pierwszego równania przez liczbę 5, otrzymujemy przeciwne współczynniki przy niewiadomej y, co pozwala nam ją zredukować.

$$\begin{cases} -y - 7z = -11 \ | \cdot 5 \\ 5y - 4z = -23 \end{cases}$$

$$\underline{+\begin{cases} -5y - 35z = -55 \\ 5y - 4z = -23 \end{cases}} \qquad -39z = -78 \ |: (-39)$$

$$z = 2$$

Po obliczeniu wartości zmiennej z, podstawiamy ją do pierwszego z równań układu.

$$\begin{cases} -y - 7z = -11 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y - 7 \cdot 2 = -11 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = -11 + 14 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} x = 9 + 2y - 2z \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Możemy teraz obliczyć wartość x, podstawiając do pierwszego równania obliczone wartości y oraz z.

$$\begin{cases} x = 9 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

A zatem rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

jest trójka liczb

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

(Sprawdź!)

Przykład 3

Układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

możemy również rozwiązać wyznaczając niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = 7 \\ y = 3x + 2z - 4 \\ x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość y do pozostałych równań układu.

$$\begin{cases} 2x - 5 \cdot (3x + 2z - 4) - 3z = 7 \\ y = 3x + 2z - 4 \\ x - 2 \cdot (3x + 2z - 4) + 2z = 9 \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x - 5 \cdot (3x + 2z - 4) - 3z = 7 \\ x - 2 \cdot (3x + 2z - 4) + 2z = 9 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ równań do najprostszej postaci i korzystając z metody przeciwnych współczynników obliczamy wartości niewiadomych x oraz z.

$$\begin{cases} 2x - 15x - 10z + 20 - 3z = 7 \\ x - 6x - 4z + 8 + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13x - 13z = -13 \mid : (-13) \\ -5x - 2z = 1 \end{cases}$$

Mnożymy pierwsze równanie przez liczbę 2, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej z.

$$\begin{cases} x+z=1 \mid \cdot 2 \\ -5x-2z=1 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$+\begin{cases} 2x+2z=2 \\ -5x-2z=1 \end{cases} \qquad -3x=3 \;\; |:(-3)$$

$$x=-1$$

Obliczoną wartość x podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} x=-1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ -1+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Możemy teraz obliczyć wartość y, podstawiając do pierwszego równania obliczone wartości x oraz z.

$$\begin{cases} x=-1 \\ z=2 \\ y=3x+2z-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ z=2 \\ y=3\cdot(-1)+2\cdot 2-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Możemy więc zauważyć, że wybór równania oraz niewiadomej, którą wyznaczamy jako pierwszą nie ma wpływu na rozwiązanie układu.

Przykład 4

Rozwiążemy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = -1 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ -2x + y + 3z = 5 \end{cases}.$$

Możemy wyznaczyć niewiadomą z z pierwszego równania, podstawić otrzymane wyrażenie do pozostałych równań układu i uprościć otrzymany układ.

$$\begin{cases} z = 5x - 2y + 1 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ -2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 5x - 2y + 1 \\ 3x - y + 2 \cdot (5x - 2y + 1) = 4 \\ -2x + y + 3 \cdot (5x - 2y + 1) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 5x - 2y + 1 \\ 3x - y + 10x - 4y + 2 = 4 \\ -2x + y + 15x - 6y + 3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 5x - 2y + 1 \\ 13x - 5y = 2 \\ 13x - 5y = 2 \end{cases}$$

Otrzymane po uproszczeniu równania, tworzą nieoznaczony układ równań liniowych.

$$\begin{cases}13x-5y=2\\13x-5y=2\end{cases}$$

Rozwiązaniem takiego układu jest nieskończenie wiele par liczb postaci

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Podstawiając te dane do początkowego układu trzech równań z trzema niewiadomymi, otrzymujemy

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\\z=5x-2y+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\\z=5x-2\left(\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\right)+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\\z=5x-\frac{26}{5}x+\frac{4}{5}+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=\frac{13}{5}x-\frac{2}{5}\\z=-\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}\end{cases}$$

A zatem układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi $\begin{cases}5x-2y-z=-1\\3x-y+2z=4\\-2x+y+3z=5\end{cases}$ jest spełniony przez nieskończenie wiele trójek liczb postaci

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=2,6x-0,4\\z=-0,2x+1,8\end{cases}.$$

Przykład 5

Układy równań bardzo często wykorzystujemy do rozwiazywania zadań tekstowych.

Oblicz, ile lat ma Tosia, ile Zosia, a ile Marysia, jeśli wiadomo, że połowa wieku Zosi równa się $\frac{3}{4}$ sumy lat Tosi i Marysi oraz, że trzy lata temu suma lat Zosi i Marysi była dwukrotnie większa od wieku Tosi, a za cztery lata Zosia będzie miała dwa razy tyle lat, co Tosia ma teraz.

Rozwiążemy powyższe zadanie układając i rozwiązując odpowiedni układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

t – wiek Tosi,
z – wiek Zosi,
m – wiek Marysi.

Jeśli połowa wieku Zosi równa się $\frac{3}{4}$ sumy lat Tosi i Marysi, to

$\frac{1}{2}z = \frac{3}{4}(t+m)$.

Jeśli trzy lata temu suma lat Zosi i Marysi była dwukrotnie większa od wieku Tosi, to

$(z-3)+(m-3)=2(t-3)$.

Jeśli za cztery lata Zosia będzie miała dwa razy tyle lat, co Tosia ma teraz, to

$z+4=2t$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2}z = \frac{3}{4}(t+m) \\ (z-3)+(m-3)=2(t-3) \\ z+4=2t \end{cases}$$

Wyznaczamy wartość niewiadomej z z trzeciego równania i podstawiamy otrzymane wyrażenia do pozostałych równań – zapisujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}z = \frac{3}{4}(t+m) \\ (z-3)+(m-3)=2(t-3) \\ z=2t-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2t-4) = \frac{3}{4}(t+m) \\ 2t-4-3+m-3=2t-6 \end{cases}$$

Obliczamy wartości niewiadomych t oraz m.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2t-4) = \frac{3}{4}(t+m) \ \big| \cdot 4 \\ -4+m=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t-8=3t+3m \\ -4+m=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=4 \\ t=3m+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=4 \\ t=20 \end{cases}$$

Wracamy do układu trzech równań z trzema niewiadomymi i podstawiamy otrzymane wartości.

$$\begin{cases} m=4 \\ t=20 \\ z=2t-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=4 \\ t=20 \\ z=36 \end{cases}$$

A zatem obecnie Tosia ma 20 lat, Zosia 36 lat, a Marysia 4 lata.

Przykład 6

Układy równań liniowych możemy rozwiązywać wykorzystując metodę eliminacji Gaussa.

Carl Friedrich Gauss

$(30.04.1777 - 23.02.1855)$

– niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta.

Uznawany jest za jednego z twórców geometrii nieeuklidesowej.

Uważany jest za jednego z największych matematyków, określany mianem „Księcia matematyków”.

Portret Carla Friedricha Gaussa pędzla Gottlieba Biermanna, 1887
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

W metodzie eliminacji Gaussa dodajemy jedno z równań (pomnożone przez odpowiednią liczbę różną od zera) do każdego z pozostałych równań układu, tak, aby zredukować w tym układzie jedną z niewiadomych. Eliminujemy w ten sposób jedno z równań.
Stosujemy taki algorytm konsekwentnie, aż do obliczenia pierwszej z niewiadomych.
Następnie podstawiając otrzymane wartości, obliczamy pozostałe niewiadome.
Możemy w ten sposób rozwiązać dowolny układ równań liniowych.

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} x+3y-5z=22 \\ 3x+5y+3z=-16 \\ -2x-4y-z=7 \end{cases}$$

Dodajemy pierwsze równanie pomnożone przez liczbę (-3) do drugiego równania oraz pierwsze równanie pomnożone przez liczbę 2 do trzeciego równania.

$$\begin{array}{c} x+3y-5z=22 \\ \Downarrow \cdot(-3) \\ -3x-9y+15z=-66 \\ + \\ 3x+5y+3z=-16 \\ \Downarrow \\ -4y+18z=-82 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x+3y-5z=22 \\ \Downarrow \cdot 2 \\ 2x+6y-10z=44 \\ + \\ -2x-4y-z=7 \\ \Downarrow \\ 2y-11z=51 \end{array}$$

Otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} -4y+18z=-82 \\ 2y-11z=51 \end{cases}$$

Ponownie stosujemy schemat. Teraz dodajemy do pierwszego drugie równanie pomnożone przez liczbę 2.

$$2y - 11z = 51$$

$$\Big\Downarrow \cdot 2$$

$$4y - 22z = 102$$

$$+$$

$$-4y + 18z = -82$$

$$\Big\Downarrow$$

$$-4z = 20$$

Otrzymaliśmy jedno równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązujemy równanie.

$-4z = 20 \mid : (-4)$

$z = -5$

Podstawiając otrzymaną wartość do dowolnego równania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi y i z, obliczamy wartość niewiadomej y.

$$\begin{cases} z = -5 \\ 2y - 11z = 51 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

Podstawiając otrzymane wartości do dowolnego równania układu trzech równań z trzema niewiadomymi x, y i z, obliczamy wartość niewiadomej x.

$$\begin{cases} z = -5 \\ y = -2 \\ x + 3y - 5z = 22 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 22 \\ 3x + 5y + 3z = -16 \\ -2x - 4y - z = 7 \end{cases}$$

jest trójka liczb

$$\begin{cases} z = -5 \\ y = -2. \\ x = 3 \end{cases}$$

Słownik

układ równań

koniunkcja co najmniej dwóch równań

rozwiązanie układu równań

każdy układ liczb spełniających jednocześnie każde z równań składowych w tym układzie

układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą zasadę rozwiązywania układu trzech równań równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DkOLZndhY

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-z=6 \\ x-y+z=4 \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników:

a. wyznaczając niewiadomą x z pierwszego równania;

b. wyznaczając niewiadomą y z drugiego równania;

c. wyznaczając niewiadomą z z trzeciego równania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Suma długości boków trójkąta ABC wynosi 22. Jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego i o trzy dłuższy od trzeciego z nich. Zapisz odpowiedni układ równań i oblicz długości boków trójkąta.

Ćwiczenie 8

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-z}{3} = y - 5\frac{5}{6} \\ 2(x+y) + 3(y-z) = z. \\ z - y = x \end{cases}$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję układu równań liniowych
- sprawdza czy dane liczby są rozwiązaniem układu równań liniowych z trzema niewiadomymi
- rozwiązuje układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem prezentacji
- wędrujące plakaty

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą wędrujących plakatów.
3. Uczniowie w parach przypominają sobie zasadę rozwiązywania układów równań metodą podstawiania.
4. Chętni uczniowie podają przykłady układów równań, które zostają zapisane na plakatach.

Faza realizacyjna:

1. Pracując w parach, uczniowie zapoznają się z przykładami zawartymi w części „Przeczytaj” i prezentacją multimedialną, a następnie wykonują polecenie umieszczone pod prezentacją.
2. Uczniowie pracują w czteroosobowych grupach. Ich zadaniem jest rozwiązywanie układów trzech równań pierwszego stopnia z trzema niewiadomymi. Każda grupa przygotowuje plakat przepisując podany układ równań i zapisuje pierwsze równoważne przekształcenie.
   Plakat zostaje przekazany kolejnej grupie, która dopisuje kolejny równoważny układ równań. Plakaty są przekazywane tak długo, aż układ zostanie rozwiązany.
3. Nauczyciel nadzoruje pracę grup i wyjaśnia wątpliwości.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania zawarte w materiale prezentacji multimedialnej. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia schematu algorytmu rozwiazywania układów trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Może też stanowić poszerzenie lekcji dotyczących rozwiązywania układów dwóch równań liniowych