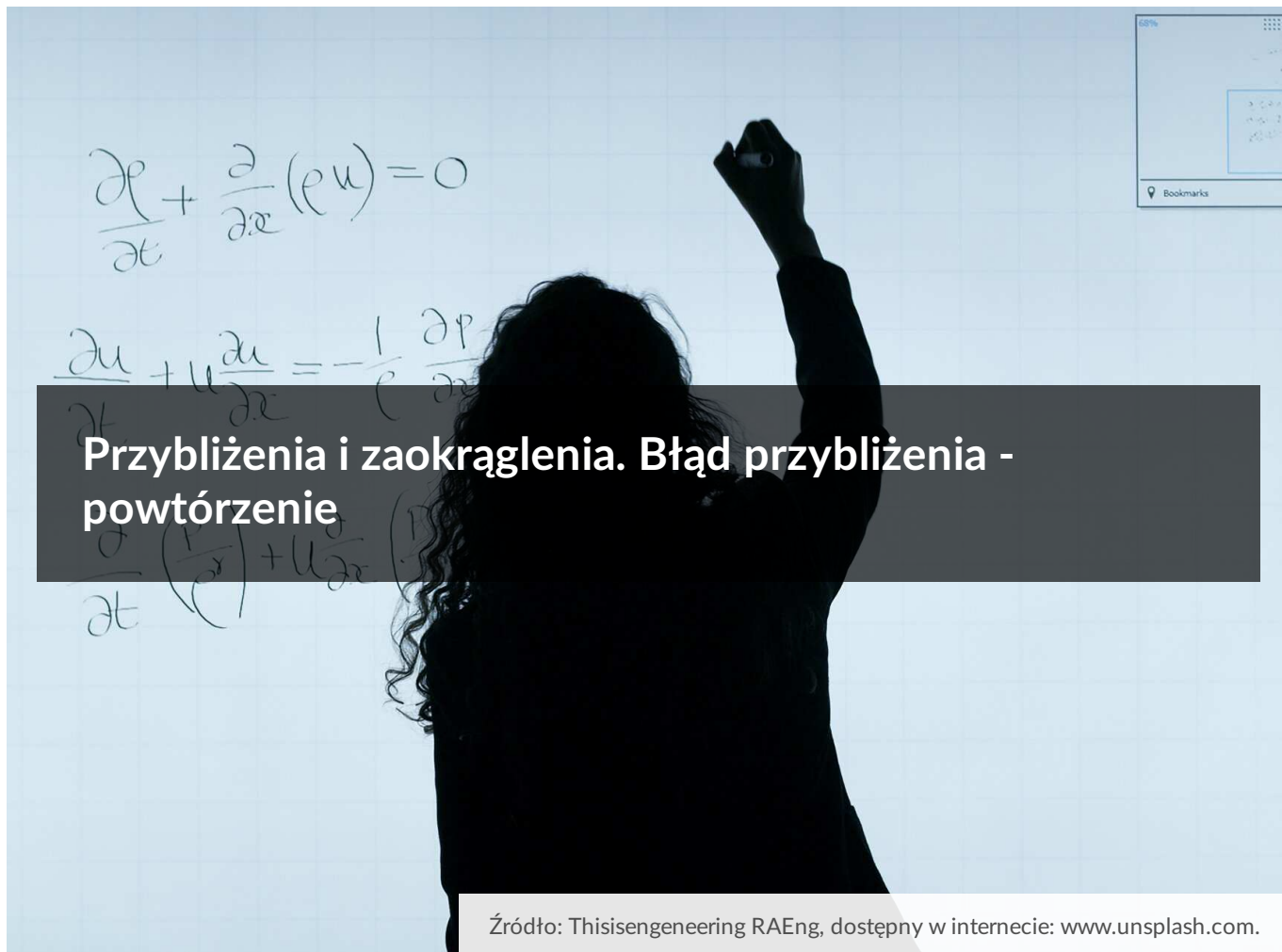




Przybliżenia i zaokrąglenia. Błąd przybliżenia - powtórzenie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Scenariusz dla nauczyciela



Sensowne stosowanie matematyki polega między innymi na wyczuciu, kiedy absolutna precyzja naszych rachunków jest niezbędna, a kiedy możemy sobie pozwolić na pewną niedokładność.

Pewnego typu szacowania nie zawsze są dopuszczalne. Na przykład, wychowawca jadący z klasą na wycieczkę nie może stwierdzić, że z wycieczki wróciło mniej więcej tyle samo uczniów, ile wyjechało, z dokładnością do 2 – 3 osób. Są więc sytuacje, gdy na żadne przybliżenia nie ma miejsca, a liczą się tylko dokładne wartości.

W tym materiale pokażemy jak stosować przybliżenia w sytuacjach, w których jest to praktyczne i dopuszczalne rozwiązanie.

Twoje cele

- Wykorzystasz reguły zaokrąglania liczb w zadaniach.
- Wskażesz błąd względny i bezwzględny.
- Wymienisz sytuacje z życia wzięte, w których można i w których nie można zaokrąlać liczb.

Przeczytaj

Przykład 1

W biurze redaktora naczelnego *Gazety Powiatowej* wisi plakat, na którym uwieczniono wizerunki kilkuset uczniów klas maturalnych, ustawionych w 25 rzędach, a w każdym rzędzie od 30 do 35 osób. Zdaniem redaktora na plakacie jest około ośmiuset osób. Jest to poprawne oszacowanie, ponieważ liczba maturzystów na pewno jest nie mniejsza niż $25 \cdot 30 = 750$ i nie większa niż $25 \cdot 35 = 875$. Dokładna wartość nie jest redaktorowi potrzebna.

Przykład 2

Płytę pilśniową o długości 262 cm mamy pociąć na siedem równych części, przy czym do odmierzenia długości odcinanych części używamy standardowej taśmy z podziałką milimetrową. Ponieważ:

$$\frac{262}{7} = 37, (428571)$$

więc zapewne będziemy odcinać kolejne części w odstępach równych 37,4 cm, zaniehbując dziesiąte części milimetra.

W drugim przykładzie liczbę, która miała po przecinku wiele cyfr (tak naprawdę nieskończenie wiele), przybliżyliśmy liczbą z tylko jedną cyfrą po przecinku. Przypomnijmy regułę, która obowiązuje przy wykonywaniu tego typu działań.

Definicja: Reguła zaokrągleń

Jeżeli zaokrąglamy liczbę do n – tego miejsca po przecinku, to cyfrę na miejscu n – tym:

- zostawiamy bez zmian, gdy na $n + 1$ miejscu jest cyfra 0, 1, 2, 3 lub 4,
- zwiększamy o 1, gdy na $n + 1$ miejscu jest cyfra 5, 6, 7, 8 lub 9.

Uwaga!

Jeżeli zaokrąglenie powoduje, że trzeba zwiększyć o 1 cyfrę 9, to zamiast 9 piszemy 0 i zwiększamy o 1 poprzednią cyfrę. Na przykład liczba 0,50398, w zaokrągleniu do czwartego miejsca po przecinku, to 0,5040, czyli 0,504.

Przykład 3

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{23}$ jest okresowe, przy czym okres składa się aż z 22 cyfr:

$$\frac{1}{23} = 0, (0434782608695652173913)$$

Jeśli więc chcemy operować ułamkiem $\frac{1}{23}$ w postaci rozwinięcia dziesiętnego, to zazwyczaj będziemy używać jego przybliżonej wartości. Przykładowo, możemy ten ułamek zaokrąglić do trzech miejsc po przecinku: $\frac{1}{23} = 0,043$ lub – powiedzmy do siedmiu: $\frac{1}{23} \approx 0,0434783$.

Zaokrąglenia i przybliżenia często są obarczone pewnym **błędem**. Jeżeli przybliżenie jest większe od przybliżanej wartości, to mamy do czynienia z przybliżeniem z nadmiarem, a gdy jest mniejsze – z przybliżeniem z niedomiarem.

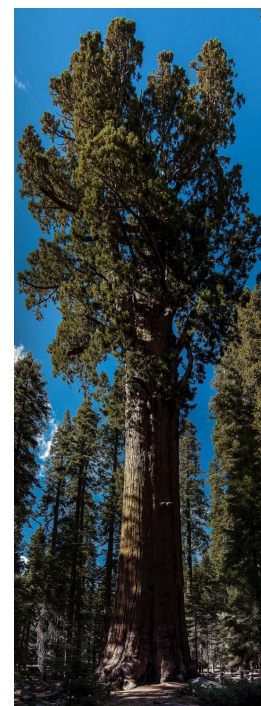
Przykład 4

Wieża Eiffla liczy 324 m wysokości. Jeśli powiemy, że ma ona 320 m, to przybliżymy jej wysokość z niedomiarem. Pomylimy się przy tym w naszym przybliżeniu o 4 m.

Przykład 5

Jedne z największych drzew na Ziemi to sekwoje. Należące do tego gatunku drzewo General Sherman ma objętość (zwaną także miąższością) szacowaną na 1489 m^3 . Jeśli powiemy, że ma ono 1500 m^3 objętości, to przybliżymy tę wielkość z nadmiarem. Pomyłka związana z naszym przybliżeniem będzie równa 11 m^3 .

Drzewo General Sherman ma około dwa i pół tysiąca lat i mierzy blisko 84 m.



Drzewo General Sherman
Źródło: dostępny w internecie: flickr.com.

Definicja: Błąd bezwzględny

W powyższych przykładach, określając niedokładność naszego szacowania, używaliśmy tzw. błędu bezwzględnego. Oto ścisła definicja tego pojęcia.

Jeżeli liczba \tilde{q} jest przybliżeniem liczby q , to **błędem bezwzględnym** tego przybliżenia nazywamy liczbę: $|q - \tilde{q}|$

Już wiesz

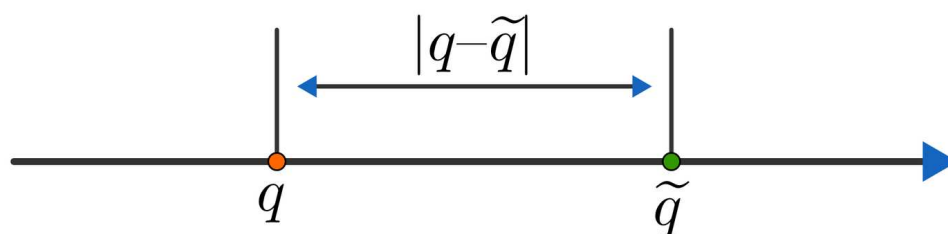
Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna, np. $|3| = 3$ oraz $|-4| = 4$.

Uwaga!

Błąd bezwzględny podajemy w tych samych jednostkach, w których wyrażona jest wielkość przybliżana.

Uwaga!

Błąd bezwzględny to odległość liczb q i \tilde{q} na osi liczbowej:



Błąd bezwzględny wyraża się liczbą nieujemną. Ponadto zachodzi równość:

$$|q - \tilde{q}| = |\tilde{q} - q|$$

Przykład 6

Kazik, oglądając film przyrodniczy o płetwalu błękitnym, stwierdził, że płetwal waży pewnie 200 ton (czyli 200000 kg). Płetwal ważył dokładnie 198560 kg, zatem chłopiec przybliżył jego masę z nadmiarem. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy: $|200000 - 198560|$ (kg) = 1440 (kg).



Płetwal błękitny (*Balaenoptera musculus*)

Źródło: National Oceanic and Atmospheric Administration, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Przykład 7

Wujek Kazika, przyglądając się w ZOO ryjówce etruskiej, ważącej 2 gramy, pomyślał, że musi ona ważyć około dwóch dekagramów. Wujek Kazika przybliżył masę ryjówki z nadmiarem. **Błąd bezwzględny** tego przybliżenia jest równy:

$$|20 - 2| \text{ (g)} = 18 \text{ (g)}.$$

Ryjówka etruska to jeden z najmniejszych ssaków żyjących na Ziemi.



Ryjówka etruska

Źródło: dostępny w internecie: creativecommons.org.

Mimo, że wujek Kazika pomylił się tylko o 18 gramów, a Kazik o 1,44 tony, to jednak wydaje się, że to Kazik dokładniej oszacował wagę płetwala, niż jego wujek, próbując określić wagę ryjówki.

Aby to nasze odczucie wyrazić precyzyjnie, musimy zdefiniować jeszcze jeden ważny parametr, który będzie odnosił przybliżenie danej liczby do jej wielkości.

Definicja: Błąd względny

Jeżeli liczba \tilde{q} jest przybliżeniem liczby $q \neq 0$, to **błędem względnym** tego przybliżenia nazywamy liczbę: $\frac{|q - \tilde{q}|}{|q|}$

Przykład 8

Obliczymy **błąd względny**, jaki popełnił Kazik w swoich szacunkach masy pletwala.

Mamy: $q = 198\,560$, $\tilde{q} = 200\,000$.

Stąd błąd względny jest równy: $\frac{|200000-198560|}{198560} = \frac{1440}{198560} = 0,00725\dots$

W ocenie masy pletwala Kazik pomylił się więc jedynie o około 0,7 procent.

Ważne!

Jak widać na przykładach, błąd względny wygodnie jest podawać w postaci procentu. Błąd ten, jako stosunek dwóch wielkości wyrażonych tą samą jednostką, jest bezwymiarowy.

Przykład 9

Obliczymy teraz **błąd względny**, jaki popełnił wujek Kazika w ocenie masy ryjówki.

Mamy $q = 0,002$ oraz $\tilde{q} = 0,02$, zatem błąd względny jest równy:

$$\frac{|0,002 - 0,02|}{0,002} = \frac{0,018}{0,002} = 9$$

Wujek Kazika pomylił się w ocenie masy ryjówki aż o 900%.

Zobaczymy teraz, jak błąd w ocenie jednej wielkości może wpływać na błąd w ocenie innej wielkości.

Przykład 10

Odległość w linii prostej między Rzeszowem a Szczecinem jest równa 636 km. Na mapie w skali 1 : 2500000 odległość ta, zmierzona linijką z podziałką milimetrową, wynosi 25,6 cm. Korzystając z tego pomiaru, możemy oszacować rzeczywistą odległość w linii prostej między tymi miastami. $25,6 \cdot 2500000 = 64000000$ (cm), więc odległość ta wynosi 640 km.

Zauważmy, że **błąd bezwzględny** oszacowania odległości obu miast wynosi 4 km, więc **błąd względny** to w tym przypadku $\frac{4}{636} = 0,0062893\dots$, a więc jest mniejszy niż 0,7%.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 4.0.

Przykład 11

Sprzedawca owoców ma wagę, która waży z dokładnością do pięciu dekagramów. Załóżmy, że klient kupuje kilogram jabłek w cenie 4 zł za kilogram. Oblicz, ile groszy może w najgorszym przypadku przepłacić z powodu niedoskonałości sklepowej wagi.

Zauważmy, że jeśli sprzedawca położy na wadze 95 dag jabłek, a waga wskaże 1 kg, to klient za 95 dag jabłek zapłaci 4 zł, choć prawidłowo powinien zapłacić:

$$0,95 \text{ (kg)} \cdot 4 \left(\frac{\text{zł}}{\text{kg}} \right) = 3,80 \text{ (zł)}$$

W najbardziej niesprzyjających okolicznościach klient przepłaci za kupiony towar 20 gr.

Słownik

błąd względny

jeżeli liczba \tilde{q} jest przybliżeniem liczby $q \neq 0$, to błędem względnym tego przybliżenia nazywamy liczbę: $\frac{|q - \tilde{q}|}{|q|}$

błąd bezwzględny

jeżeli liczba \tilde{q} jest przybliżeniem liczby q , to błędem bezwzględnym tego przybliżenia nazywamy liczbę: $|q - \tilde{q}|$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną a następnie rozwiąż zadania.

Polecenie 2

Ustal, jaki jest podatek VAT od kwoty 41256, 83 zł. Podatek VAT jest naliczany w wysokości 7%. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 grosza.

Polecenie 3

Liczbę $\frac{50}{19}$ przybliżono liczbą 2, 6. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny tego przybliżenia.

Polecenie 4

Zając waży 6, 2 kg. Oblicz błąd względny, jaki popełnimy, mówiąc, że waży on 6 kg. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 procenta.



Źródło: Iwona Kałuzińska, dostępny w internecie:
<https://commons.wikimedia.org/>, licencja: CC BY-SA 4.0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Scenariusz dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przybliżenia i zaokrąglenia. Błąd przybliżenia - powtórzenie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zaokrągli liczbę z podaną dokładnością,
- definiuje i oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia,
- oblicza błąd przybliżenia danej liczby oraz ocenia i określa rodzaj przybliżenia – z nadmiarem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- studium przypadku;

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat lekcji i kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości, które dotychczas uzyskali, na temat liczb rzeczywistych.
3. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Przybliżenia i zaokrąglenia. Błąd przybliżenia - powtórzenie”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji Przeczytaj. Pracują przy tym (pod kierunkiem liderów grup) metodą studium przypadku - rozważając jako oddzielny przypadek, każdy z podanych przykładów.
2. Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat jaki sposób należy postępować, gdy dane przybliżenie jest z nadmiarem, a jak gdy jest ono z niedomiarem, czym różni się przybliżenie od zaokrąglenia.
3. Uczniowie w grupach zapoznają się z prezentacją multimedialną i na jej podstawie ułożyć podobne zadania. Następnie przedstawiciele grup rozwiązują zadania na tablicy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

Liderzy grup dzielą się uwagami na temat pracy grup, nauczyciel dodaje swoje uwagi, ocenia prace uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia interaktywne 1-5 w sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- [Przybliżenia i zaokrąglenia liczb](#)

- Błąd bezwzględny, błąd względny

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana w czasie zajęć dotyczących wartości bezwzględnej (lub działań na liczbach rzeczywistych).