Potęga o wykładniku wymiernym

Potęga o wykładniku wymiernym

Analizując treści zawarte w tym materiale przypomnisz sobie definicję potęgi o wykładniku wymiernym i prawa działań na potęgach. Przykłady pokazują zastosowania tych praw.

> **Definicja: Potęga o wykładniku $\frac{1}{n}$**
>
> Dla dowolnej liczby nieujemnej a i liczby naturalnej n większej od 1 przyjmujemy
>
> $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Dla liczby naturalnej n większej od 1, liczby całkowitej m i liczby dodatniej a przyjmujemy

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

W szczególności, gdy $m = 1$ otrzymujemy $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Równość tę przyjmujemy też dla $a = 0$. Poznane wcześniej twierdzenia o działaniach na potęgach o całkowitych wykładnikach są prawdziwe również wtedy, gdy wykładnik jest liczbą wymierną. Mamy zatem:

> **Definicja: Działania na potęgach**
>
> Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb wymiernych x i y prawdziwe są równości
>
> - $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach)
> - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach)
> - $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ (wzór na potęgę potęgi)

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby wymiernej x prawdziwe są równości

- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych wykładnikach)
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ (wzór na iloraz potęg o tych samych wykładnikach)

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

Wykażemy, że:

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = 98^{\frac{1}{2}}.$$

Po lewej stronie równości zamieniamy potęgi na pierwiastki.

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{32} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Po prawej stronie równości postąpimy podobnie

$$98^{\frac{1}{2}} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

Z tego wynika, że obie strony równości są równe.

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = 98^{\frac{1}{2}}.$$

Przykład 2

Sprawdzimy, czy liczby $x = 3^{\frac{1}{2}} + 2$ oraz $y = \left(7 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ są równe. Podnosimy obie strony pierwszej równości do kwadratu

$$x^2 = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2.$$

Stosujemy wzór na kwadrat sumy.

$$\left(3^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 4 = 3 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 4 = 7 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

Podobnie podnosimy obie strony drugiej równości do kwadratu.

$$y^2 = \left(\left(7 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(7 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^1 = 7 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

Zatem

$$x^2 = y^2.$$

Liczby x oraz y są dodatnie. Stąd, że ich kwadraty są równe, wynika, że liczby również są równe.

$$x = y.$$