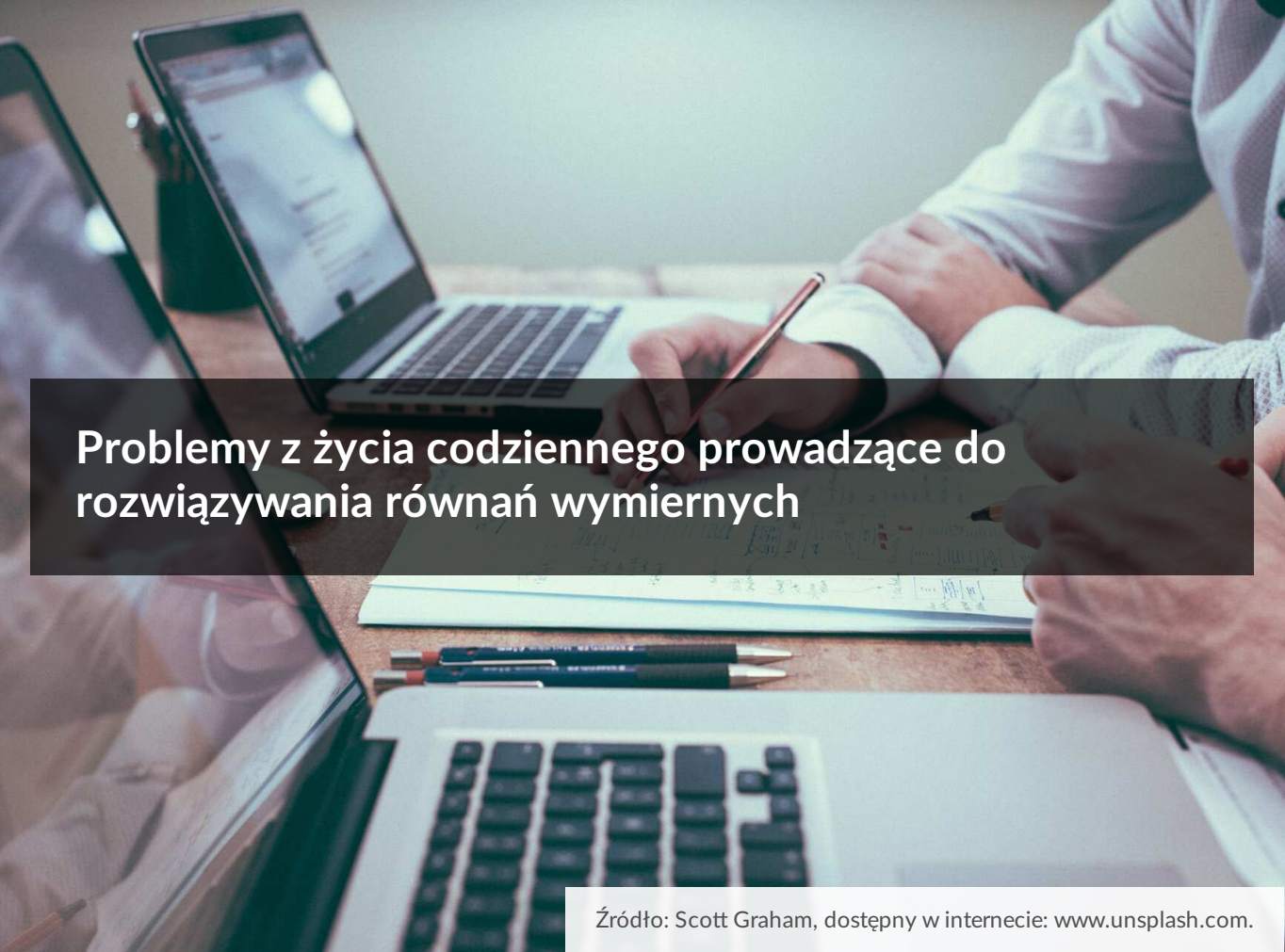




Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych

Źródło: Scott Graham, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W życiu codziennym spotykamy się z wieloma sytuacjami, które wymagają od nas użycia wiedzy i umiejętności matematycznych. Niejednokrotnie wyznaczenie pewnych wielkości związane jest z użyciem takich narzędzi, jak równania czy nierówności. W materiale omówimy przykłady zagadnień związanych z sytuacjami z życia codziennego, których rozwiązania prowadzą do równań wymiernych. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Przeanalizujesz rozwiązania problemów z życia codziennego, które prowadzą do rozwiązywania równań wymiernych.
- Zapiszesz i rozwiążesz równania wymierne opisujące dany problem z życia codziennego.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję równania wymiernego.

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$) to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy **równaniem wymiernym** z jedną niewiadomą x .

Dziedziną równania wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Równania wymierne mają szerokie zastosowanie do rozwiązywania problemów z życia codziennego. Poniżej przedstawimy kilka przykładów, których rozwiązania będą opierały się na właściwej analizie danych, ułożeniu równania wymiernego oraz interpretacji otrzymanych rozwiązań.

Przykład 1

Łukasz ma 24 lata, a jego młodszy brat – 14 lat. Obliczymy, za ile lat stosunek wieku Łukasza do wieku jego brata będzie równy 4 : 3.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

x – liczba lat, które upłyną, gdy stosunek wieku braci będzie wynosił 4 : 3 ($x > 0$)

Aby wyznaczyć x , rozwiązujemy równanie:

$$\frac{24+x}{14+x} = \frac{4}{3}$$

$$3 \cdot (24 + x) = 4 \cdot (14 + x)$$

$$72 + 3x = 56 + 4x$$

$$x = 16$$

Wobec tego musi upłynąć 16 lat.

Przykład 2

Magda wykonuje pewną pracę w ciągu 9 godzin, a Ania w ciągu 6 godzin. Obliczemy, ile czasu zajęłoby im wykonanie tej pracy, gdyby pracowały razem.

Rozwiązanie:

Niech w będzie pracą do wykonania, a t czasem wyrażonym w godzinach, potrzebnym na wykonanie tej pracy, gdyby Magda i Ania pracowały razem.

Zatem w ciągu 1 godziny wykonano pracę:

- $\frac{w}{9}$, jeżeli pracę wykonuje tylko Magda,
- $\frac{w}{6}$, jeżeli pracę wykonuje tylko Ania,
- $\frac{w}{t}$, jeżeli Magda i Ania pracują razem.

Zatem do wyznaczenia wartości t [h], gdzie $t > 0$ rozwiązujemy równanie:

$$\frac{w}{9} + \frac{w}{6} = \frac{w}{t}$$

Po podzieleniu obu stron równania przez w (liczbę dodatnią) rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{18}{5} \text{ h}$$

$$t = \frac{18}{5} \text{ h} = 3\frac{3}{5} \text{ h} = 3 \text{ h } 36 \text{ min}$$

Gdyby Magda i Ania pracowały razem, to wykonanie pracy zajęłoby im 3 h 36 min.

Przykład 3

Mama kupiła cukierki czekoladowe w cenie x zł za kilogram i zapłaciła 48 zł oraz taką samą ilość cukierków orzechowych droższych o 6 zł za kilogram i zapłaciła 66 zł.

Obliczemy, ile kosztował kilogram cukierków czekoladowych, a ile kilogram cukierków orzechowych.

Rozwiązanie:

Niech x będzie ceną za kilogram cukierków czekoladowych, wyrażoną w złotych.

Wobec tego:

- $\frac{48}{x}$ – ilość zakupionych cukierków czekoladowych w kilogramach,
- $\frac{66}{x+6}$ – ilość zakupionych cukierków orzechowych w kilogramach.

Aby wyznaczyć cenę za kilogram cukierków czekoladowych, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{48}{x} = \frac{66}{x+6}$$

$$48 \cdot (x + 6) = 66x$$

$$48x + 288 = 66x$$

$$18x = 288$$

$$x = 16$$

$$\text{Czyli } x + 6 = 16 + 6 = 22$$

Zatem 1 kg cukierków czekoladowych kosztował 16 zł, a 1 kg cukierków orzechowych kosztował 22 zł.

Przykład 4

Gdy jest otwarty kran dostarczający ciepłą wodę to napełnienie całego zbiornika trwa o 5 min dłużej niż gdy jest otwarty kran dostarczający zimną wodę. Jeśli obydwa krany są otwarte to napełnienie zbiornika odbywa się w ciągu 6 min. Obliczymy, ile czasu potrzeba na napełnienie pustego zbiornika, gdy odkręcony jest tylko kran dostarczający ciepłą wodę.

Rozwiązanie:

Niech w będzie objętością zbiornika oraz t czasem wyrażonym w minutach napełnienia zbiornika, gdy jest otwarty kran dostarczający zimną wodę ($t > 0$).

Obliczymy, jaka część objętości zbiornika zostanie napełniona w czasie 1 min:

- $\frac{w}{t}$, jeżeli otwarty jest tylko kran dostarczający zimną wodę,
- $\frac{w}{t+5}$, gdy otwarty jest tylko kran dostarczający ciepłą wodę,
- $\frac{w}{6}$, jeżeli obydwa krany są otwarte.

Wobec tego, aby wyznaczyć czas potrzebny na napełnienie zbiornika, gdy jest otwarty kran dostarczający zimną wodę, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{w}{t} + \frac{w}{t+5} = \frac{w}{6}$$

Po podzieleniu obu stron równania przez w (liczbę dodatnią), otrzymujemy:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+5} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot (t + 5) + 6t = t \cdot (t + 5)$$

$$t^2 - 7t - 30 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 169$$

$$\sqrt{\Delta} = 13$$

$$t_1 = \frac{7-13}{2} = -3 < 0$$

$$t_2 = \frac{7+13}{2} = 10 > 0$$

Wobec tego czas potrzebny na napełnienie pustego zbiornika, gdy odkręcony jest tylko kran dostarczający ciepłą wodę wynosi:

$$10 \text{ min} + 5 \text{ min} = 15 \text{ min}$$

Przykład 5

Uczeń przeczytał książkę liczącą 400 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 5 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 4 dni wcześniej. Obliczmy, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – liczba dni, przez które uczeń czytał książkę,

y – liczba stron książki przeczytanych przez ucznia w ciągu jednego dnia.

Wobec tego do wyznaczenia wartości x i y ($x, y > 0$) rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = \frac{400}{y} \\ x - 4 = \frac{400}{y+5} \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu równań sprowadzamy do równania wymiernego postaci:

$$\frac{400}{y} - 4 = \frac{400}{y+5}$$

$$400 \cdot (y+5) - 4y \cdot (y+5) = 400y$$

$$400y + 2000 - 4y^2 - 20y - 400y = 0$$

$$-4y^2 - 20y + 2000 = 0$$

$$-y^2 - 5y + 500 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 500 = 25 + 2000 = 2025$$

Zatem

$$y_1 = \frac{5-45}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20 > 0$$

$$y_2 = \frac{5+45}{-2} = -25 < 0$$

Ponieważ $y = 20$, więc $x = \frac{400}{20} = 20$

Uczeń czytał książkę przez 20 dni.

Słownik

równanie wymierne

równanie postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

gdzie:

$W(x)$ i $P(x) \neq 0$ – są wielomianami przynajmniej stopnia pierwszego

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Obejrzyj galerię zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0,$$

gdzie $P(x) \neq 0$ jest wielomianem i wielomian $P(x)$ jest stopnia przynajmniej pierws¹go.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0,$$

gdzie $P(x) \neq 0$ jest wielomianem i wielomian $P(x)$ jest stopnia przynajmniej pierwszego.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0,$$

gdzie $P(x) \neq 0$ jest wielomianem i wielomian $P(x)$ jest stopnia przynajmniej pierwszego.

1. {audio}Przypomnijmy definicję równania wymiernego.
2. {audio}Równania wymierne można wykorzystać do rozwiązywania zagadnień z życia codziennego.

Polecenie 2

Dwóch robotników pracując razem, jest w stanie wykonać pewną pracę w czasie 8 godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy zakończyłby ją o 12 godzin później niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z robotników wykonałby tę pracę samodzielnie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeżeli ojciec jest starszy od syna o 32 lata, a stosunek wieku ojca do wieku syna wynosi 3 : 1, to:

- ☐ suma wieku ojca i syna wynosi 45 lat
- ☐ 8 lat temu stosunek wieku ojca do wieku syna wynosił 4 : 1
- ☐ syn ma 16 lat, a ojciec 48 lat

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawne dokończenie zdania. Mama Kasi jest o 6 lat młodsza od jej taty. Zatem:

- ☐ jeżeli stosunek wieku taty Kasi do wieku mamy Kasi wynosi 10 : 9, to suma ich lat wynosi 104.
- ☐ jeżeli stosunek wieku mamy Kasi do wieku taty Kasi wynosi 17 : 20, to suma ich lat wynosi 74.
- ☐ jeżeli stosunek wieku taty Kasi do wieku mamy Kasi wynosi 5 : 4, to suma ich lat wynosi 44.
- ☐ jeżeli stosunek wieku taty Kasi do wieku mamy Kasi wynosi 7 : 6, to suma ich lat wynosi 78.

Ćwiczenie 3



Przeciągnij prawidłowe liczby w odpowiednie miejsca.

Basia kupiła ciastka czekoladowe w cenie x zł za kilogram i zapłaciła 35 zł oraz taką samą ilość ciastek orzechowych droższych o 4 zł za kilogram i zapłaciła 43 zł. Wówczas:

- Basia kupiła łącznie kilogramy ciastek,
- 1 kg ciastek czekoladowych kosztował zł
- 1 kg ciastek orzechowych kosztował zł

Ćwiczenie 4



Wiadomo, że pewną pracę wykonują dwie osoby. Połącz w pary treść zadania z odpowiednim rozwiązaniem.

Pomalowanie pokoju zajmuje pierwszej osobie o 4 godziny mniej niż drugiej, a gdyby pracowały razem, to czas pracy wyniósłby 3 h 45 min.

Pierwsza osoba wykonywałaby pracę w 6 godzin, a druga w 10 godzin.

Pomalowanie pokoju zajmuje pierwszej osobie o 4 godziny mniej niż drugiej, a gdyby pracowały razem, to czas pracy wyniósłby 2 h 6 min.

Pierwsza osoba wykonywałaby pracę w 3 godziny, a druga w 7 godzin.

Pomalowanie pokoju zajmuje pierwszej osobie o 4 godziny mniej niż drugiej, a gdyby pracowały razem, to czas pracy wyniósłby 4 h 48 min.

Pierwsza osoba wykonywałaby pracę w 8 godzin, a druga w 12 godzin.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Wiadomo, że jeden robotnik wykonuje pewną pracę w czasie dwa razy dłuższym niż drugi robotnik, a gdyby pracowali razem, to wykonaliby tę samą pracę w czasie 6 godzin. Wtedy:

- pierwszy robotnik wykona tę pracę w czasie godzin,
- drugi robotnik wykona tę pracę w czasie godzin.

Wiadomo, że jeden robotnik wykonuje pewną pracę w czasie o 4 godziny dłuższym niż drugi robotnik, a gdyby pracowali razem, to wykonaliby tę samą pracę w czasie 2 h 40 min.

Wtedy:

- pierwszy robotnik wykona tę pracę w czasie godzin,
- drugi robotnik wykona tę pracę w czasie godzin.

Ćwiczenie 6



Do napełnienia zbiornika można użyć trzech kranów. Drugi kran może napełnić cały zbiornik w czasie o 3 godziny dłuższym niż pierwszym, a trzeci kran – o 5 godzin dłużej niż drugi. Gdyby kran napełniały zbiornik równocześnie, to zajęłoby im to 1 h 15 min. Oblicz, w jakim czasie każdy z kranów napełnia zbiornik, gdy każdy kran pracuje osobno oraz czas pracy każdego z kranów jest wyrażony liczbą naturalną.

Ćwiczenie 7



Dwie różne maszyny wykonują pewną pracę. Gdyby pierwsza maszyna pracowała sama przez 2,5 godziny, to do zakończenia pracy obie maszyny musiałyby pracować razem jeszcze przez 2 godziny. Druga maszyna pracująca samodzielnie wykonuje tę pracę w czasie o 15 godzin dłuższym niż pierwsza. Oblicz, w ciągu ilu godzin każda z maszyn może samodzielnie wykonać tę pracę.

Ćwiczenie 8



Koszt wyjazdu uczniów do kina wyniósł 840 zł. Gdyby nie pojechali 4 osoby, to każda z pozostałych musiałaby zapłacić o 7 zł więcej. Jaki był koszt przejazdu jednego ucznia?

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x+1)(x-1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje rozwiązania problemów z życia codziennego, które wykorzystuje do rozwiązywania równań wymiernych;
- zapisuje i rozwiązuje równania wymierne do opisanego problemu życia codziennego;
- wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3–5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Problemy z życia codziennego prowadzące do rozwiązywania równań wymiernych”).

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie równań wymiernych.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące rozwiązywania problemów z życia codziennego za pomocą równań wymiernych lub do realizacji lekcji „Równania wymierne z jedną niewiadomą”.