



Przekształcanie równoważne nierówności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wiesz już, że równania można zilustrować za pomocą wagi, która pozostaje w równowadze. W przypadku, gdy masa przedmiotów umieszczonych na jednej szalce będzie większa od masy przedmiotów na drugiej szalce waga przechyli się w stronę cięższych przedmiotów. Czasem trudno jest odgadnąć poprawną maksymalną lub minimalną wagę przedmiotów umieszczonych na wadze. Dlatego ważne jest poznanie sposobów, które pozwolą ustalić jakie warunki muszą spełniać szukane zmienne.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję nierówności równoważnych.
- Rozpoznasz nierówności równoważne.
- Dopiszesz nierówności równoważne do danych nierówności.
- Sformułujesz twierdzenia o nierównościach równoważnych.
- Wykorzystasz twierdzenia o nierównościach równoważnych do rozwiązywania nierówności

Przeczytaj

Przykład 1

Na poniższym rysunku przedstawiona jest waga szalkowa przechylona na lewą stronę. Wynika z tego, że masa przedmiotów umieszczonych na lewej szalce jest większa od masy przedmiotów znajdujących się na prawej szalce.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jeżeli opakowanie cukierków waży x kilogramów, to sytuację możemy opisać za pomocą nierówności:

$$3x + 0,5 > x + 3 \cdot 0,5$$

Na pewno zauważysz, że jeżeli z obu szalek zdejmimy odważnik 50 dag waga nadal pozostanie w tym samym położeniu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Tę sytuację opisuje nierówność:

$$3x > x + 2 \cdot 0,5$$

Z obu stron wagi zdejmujemy jedno opakowanie cukierków.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Tę sytuację opisuje nierówność:

$$2x > 2 \cdot 0,5$$

Teraz podzielimy obie strony nierówności przez liczbę 2, czyli zdejmiemy z lewej szalki jedno opakowanie cukierków, a z prawej szalki jeden odważnik 0,5 kg. Na lewej szalce zostanie jedno opakowanie cukierków, a na prawej jeden odważnik 0,5 kg.

Otrzymaliśmy rozwiązanie nierówności: $x > 0,5$.

Zatem opakowanie cukierków waży więcej niż 50 dag.

W ten sposób zapisując odpowiednie [nierówności równoważne](#) rozwiązaliśmy nierówność.

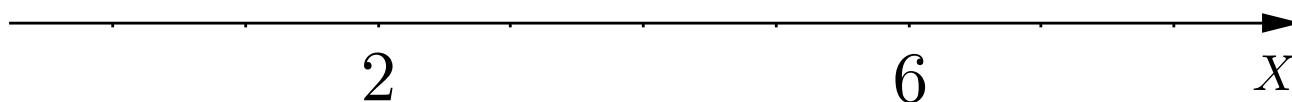
Definicja: Nierówności równoważne

Nierówności z tymi samymi niewiadomymi nazywamy równoważnymi, gdy posiadają taki sam zbiór rozwiązań.

Jeżeli do obu stron nierówności dodamy lub od obu stron nierówności odejmiemy tę samą liczbę, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 2

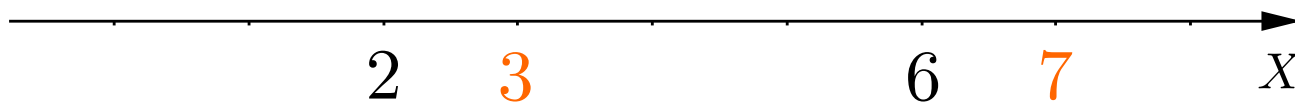
Dana jest nierówność: $2 > 6$.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Do obu stron nierówności dodajemy liczbę 1.

$$2 + 1 > 6 + 1$$



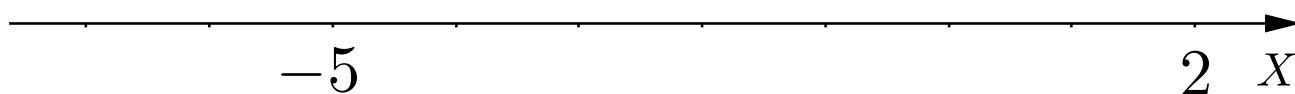
Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

$$3 > 7$$

Otrzymane sumy mają takie same uporządkowanie na osi liczbowej.

Przykład 3

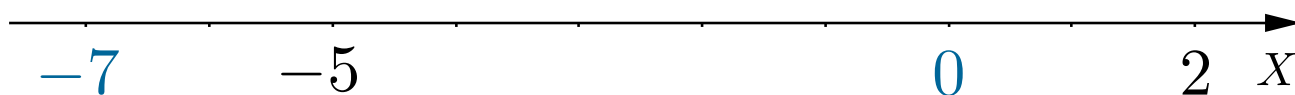
Dana jest nierówność: $-5 < 2$.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Od obydwu stron nierówności odejmujemy liczbę 2.

$$-5 - 2 < 2 - 2$$



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

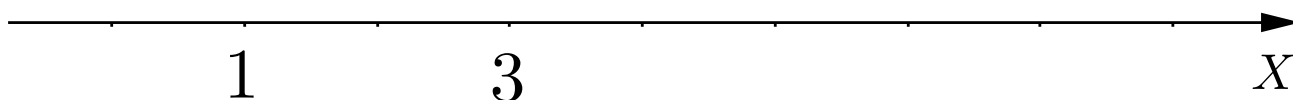
$$-7 < 0$$

Otrzymane sumy mają takie same uporządkowanie na osi liczbowej.

Jeżeli obydwie strony nierówności pomnożymy przez dowolną liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 4

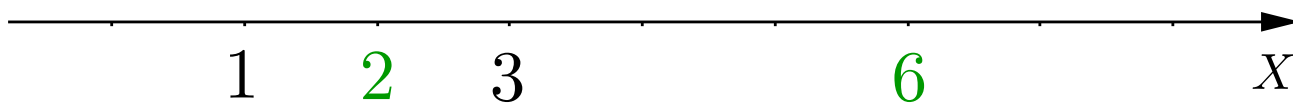
Dana jest nierówność: $1 < 3$.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Obydwie strony nierówności mnożymy przez liczbę 2.

$$1 \cdot 2 < 3 \cdot 2$$



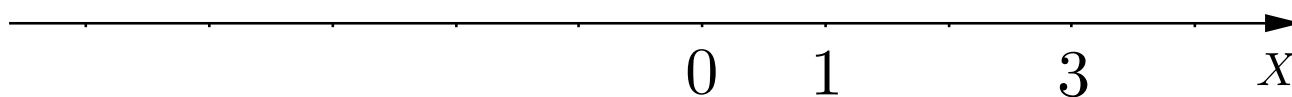
Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

$$2 < 6$$

Otrzymane iloczyny mają takie same uporządkowanie na osi liczbowej.

Przykład 5

Dana jest nierówność: $1 < 3$.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Obydwie strony nierówności mnożymy przez liczbę -1 . Podczas mnożenia liczby przez -1 otrzymamy liczbę przeciwną do początkowej. Liczby przeciwne są symetryczne względem punktu 0. Po wykonaniu działania liczby zmienią kolejność występowania na osi liczbowej.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

$$1 \cdot (-1) > 3 \cdot (-1)$$

$$-1 > -3$$

Zatem podczas mnożenia obydwu stron nierówności przez liczbę ujemną trzeba zmienić zwrot nierówności na przeciwny.

Znak nierówności zmienimy na przeciwny również podczas dzielenia przez liczbę ujemną, ponieważ dzielenie możemy zastąpić mnożeniem przez odwrotność dzielnika.

Ważne!

Aby rozwiązać nierówność zapisujemy nierówności równoważne danej, pamiętając o tym, że:

- do obu stron nierówności możemy dodać lub odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając zwrot nierówności bez zmiany,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Słownik

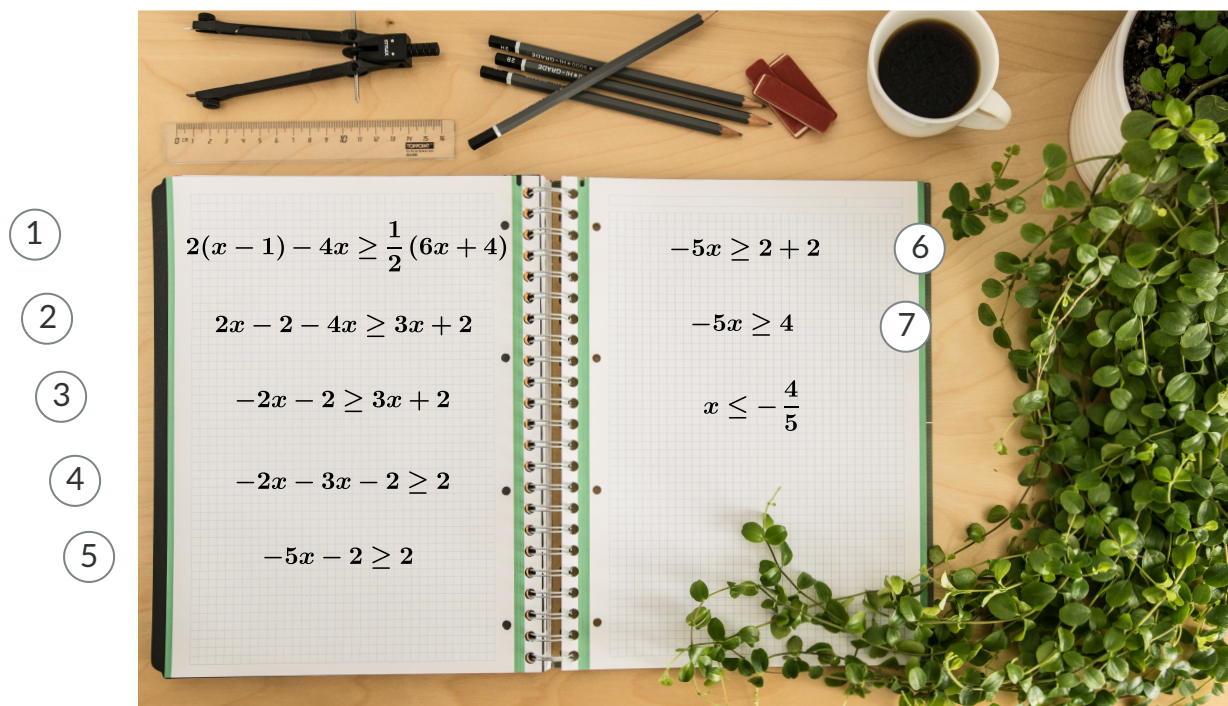
nierówności równoważne

nierówności z tymi samymi niewiadomymi, które posiadają taki sam zbiór rozwiązań

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem pokazującym sposób rozwiązywania nierówności metodą nierówności równoważnych.



1

Krok 1

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>
pozbywamy się nawiasu

2

Krok 2

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>
dokonujemy redukcji wyrazów podobnych

3

Krok 3

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>

od obydwu stron nierówności odejmujemy wyrażenie algebraiczne $3x$

4

Krok 4

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>
znów dokonujemy redukcji wyrazów podobnych

5

Krok 5

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>

do obydwu stron nierówności dodajemy liczbę 2

6

Krok 6

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>
po raz kolejny redukujemy wyrazy podobne

7

Krok 7

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PphCaM3fR>

dzielimy obydwie strony nierówności przez liczbę -5 pamiętając o zmianie znaku nierówności na przeciwny

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność: $-3(x + 2) - 5x \geq \frac{1}{3}(-6x - 3)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj nierówność równoważną danej nierówności.

$$2x + 3 > 9 \Leftrightarrow \boxed{}$$

$$-\frac{1}{3}x < -12 \Leftrightarrow \boxed{}$$

$$-2x > 6 \Leftrightarrow \boxed{}$$

$$5x + 5 > 0 \Leftrightarrow \boxed{}$$

$$\boxed{-3x < 3}$$

$$\boxed{-x < -3}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x > 18}$$

$$\boxed{x < -3}$$

Ćwiczenie 2



Spośród poniższych nierówności wybierz nierówności równoważne.

☐ $-3x < \frac{3}{2}$

☐ $x - 2,5 > -3$

☐ $-2x > -4$

☐ $-x + 1 < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

☐ $-\frac{1}{3}x < \frac{1}{6}$

☐ $x > -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówności równoważne.

$$2x + \frac{2}{3} > -\frac{1}{3}$$

$$x - 3 > -5$$

$$3 - x \leq -2x$$

$$x - 1 \leq -3$$

$$-4x - 4 \geq 4$$

$$x < 0$$

$$2x + 9 > -2,5x$$

$$-x \geq 3$$

$$4x - 4 < x - 4$$

$$-x - 1 < -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x \leq 4$$

$$x \geq -8$$

Ćwiczenie 4



Wskaż nierówność, która nie jest równoważna pozostałym nierównościom.

☐ $1\frac{1}{2}x - 2 > 3x + 1$

☐ $1,5x < -3$

☐ $\frac{1}{2}(x - 4) > 2x + 1$

☐ $\frac{1}{2}x - 4 > 2x + 1$

Ćwiczenie 5



Wstaw w odpowiednie miejsce taką liczbę, aby nierówności były równoważne.

$$-3x + 1 > -2 \text{ i } 2x < \boxed{}$$

$$2x - 4 \leq x + 1 \text{ i } x - 1 \leq \boxed{}$$

$$3(2 - x) \leq 2x + 1 \text{ i } -3x \leq 2x - \boxed{}$$

$$1 - 4(x - 2) < x + 3(x - 1) \text{ i } \boxed{} x > 12$$

4 7 8 6 5 2 3 9 1

Ćwiczenie 6



Dopasuj w odpowiednie miejsce taki jednomian, aby nierówności były równoważne.

$$-x > 3 \text{ i } \boxed{} < -18$$

$$\frac{1}{2}x - 4 \leq 3 \text{ i } \boxed{} \geq -14$$

$$2x + 1 > 8x + 2 \text{ i } \boxed{} + 1 > 2$$

$$-3x - 2 \leq x + 2 \text{ i } \boxed{} \geq -1$$

$-6x$ x $-x$ $-3x$ $6x$ $-2x$ $2x$ $3x$

Ćwiczenie 7



Połącz w pary nierówności równoważne.

$$x + 2 > 1$$

$$-x - 1 < 0$$

$$2 - x < 1$$

$$x > 1$$

$$3x \geq 9$$

$$x \geq 3$$

$$\frac{1}{4}x < 2$$

$$x < 8$$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówności metodą nierówności równoważnych. Przeciągnij odpowiednią odpowiedź do danej nierówności.

$$3(x - 3) + 2x > \frac{1}{2}(4x - 4) \rightarrow \boxed{}$$

$$\frac{1}{3}x - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq -3\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x + 1) > 2x - \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{}$$

$$x \leq -\frac{1}{4}$$

$$x > 2\frac{1}{3}$$

$$x \geq \frac{3}{8}$$

$$x \leq -\frac{3}{8}$$

$$x > -\frac{5}{21}$$

$$x < \frac{5}{21}$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie równoważne nierówności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję nierówności równoważnych
- rozpoznaje nierówności równoważne
- dopisuje nierówności równoważne do danych nierówności
- wykorzystuje twierdzenia o nierównościach równoważnych do rozwiązywania nierówności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem infografiki

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie wiadomości związanych z rozwiązywaniem równań metodą równań równoważnych.
2. Uczniowie powinni też przypomnieć sobie w domu sposób rozwiązywania prostych nierówności.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z rozwiązywaniem równań metodą równań równoważnych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają infografikę i konsultują wykonania poleceń umieszczonych pod infografiką.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7, 8.

Materiały pomocnicze:

[Rozwiązywanie nierówności liniowych metodą nierówności równoważnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Multimedia może być wykorzystane przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli dotyczącej twierdzeń o nierównościach równoważnych.