



Równoległość wektorów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równoległość wektorów

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W dowodzeniu twierdzeń z geometrii elementarnej zaskakująco często przydają się wektory i ich własności. Jednym z najważniejszych twierdzeń dotyczących wektorów jest kryterium ich równoległości, które omówimy w tej lekcji.

Twoje cele

- Rozpoznaś wektory równoległe.
- Wykorzystasz warunek równoległości wektorów do dowodzenia twierdzeń

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję równoległości wektorów. Niezerowe wektory są równoległe, jeśli zawarte są w prostych równoległych, tzn. mają ten sam kierunek. Dla wektora zerowego nie definiujemy równoległości.

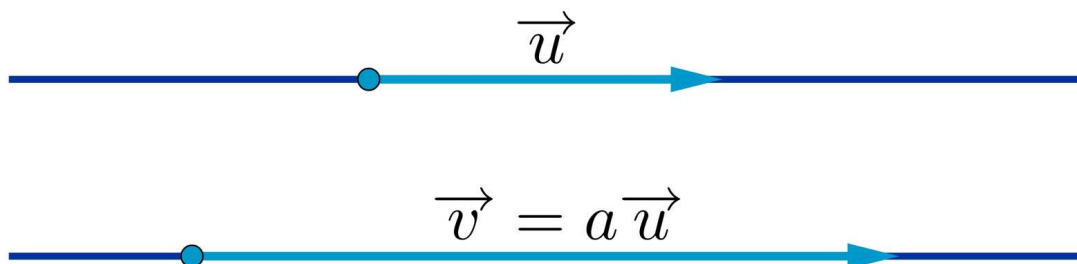
Udowodnimy teraz twierdzenie podające [kryterium równoległości wektorów](#) niezerowych.

Twierdzenie: kryterium równoległości wektorów

Wektory niezerowe $\vec{u}$, $\vec{v}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $a \neq 0$ taka, że (1) $\vec{v} = a\vec{u}$.

Dowód

Ponieważ twierdzenie ma postać równoważności, mamy do rozważenia dwie implikacje. Jeżeli wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ spełniają równość $\vec{v} = a\vec{u}$ to są równoległe na mocy definicji.

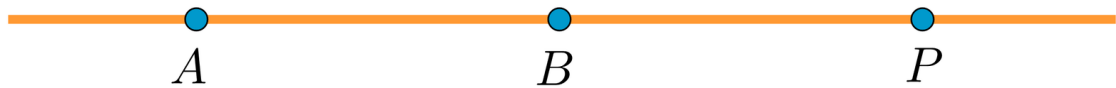


Założmy teraz, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ są równoległe. Jeżeli mają ten sam zwrot, to przyjmując $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$, otrzymamy równość $|\vec{v}| = a \cdot |\vec{u}|$, która w myśl definicji iloczynu wektora i liczby oznacza, że wektor $\vec{v}$ jest iloczynem wektora $\vec{u}$ i liczby $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.

Gdy wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ mają zwroty przeciwne, wystarczy przyjąć $a = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ i też otrzymamy równość (1).

Wniosek 1

Punkt P leży na prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba a , że $\vec{AP} = a \cdot \vec{AB}$.



Wniosek 2

Punkt P leży na półprostej o początku A i przechodzącej przez punkt B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba a , że $a \geq 0$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.



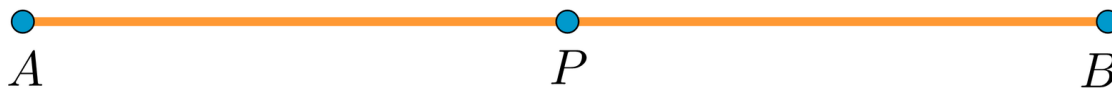
Wniosek 3

Punkt P leży na półprostej dopełniającej do półprostej o początku w punkcie A i przechodzącej przez punkt B , to jest leży na prostej AB i nie leży na półprostej AB , wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba a , że $a \leq 0$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.



Wniosek 4

Punkt P należy do odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba a taka, że $0 \leq a \leq 1$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.



Równania parametryczne

Powyższe wnioski pozwalają wprowadzić tzw. parametryzacje (lub równania parametryczne) następujących figur geometrycznych:

- **równanie parametryczne prostej AB :** jeżeli a może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą, to wszystkie punkty P spełniające warunek $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$ tworzą prostą AB ,
- **równanie parametryczne półprostej AB :** jeżeli a może przyjąć dowolną wartość z przedziału $\langle 0, \infty \rangle$ to wszystkie punkty P spełniające warunek $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$ tworzą półprostą AB ,
- **równanie parametryczne odcinka AB :** jeżeli a może przyjąć dowolną wartość z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, to wszystkie punkty P spełniające warunek $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$ tworzą odcinek AB .

Słownik

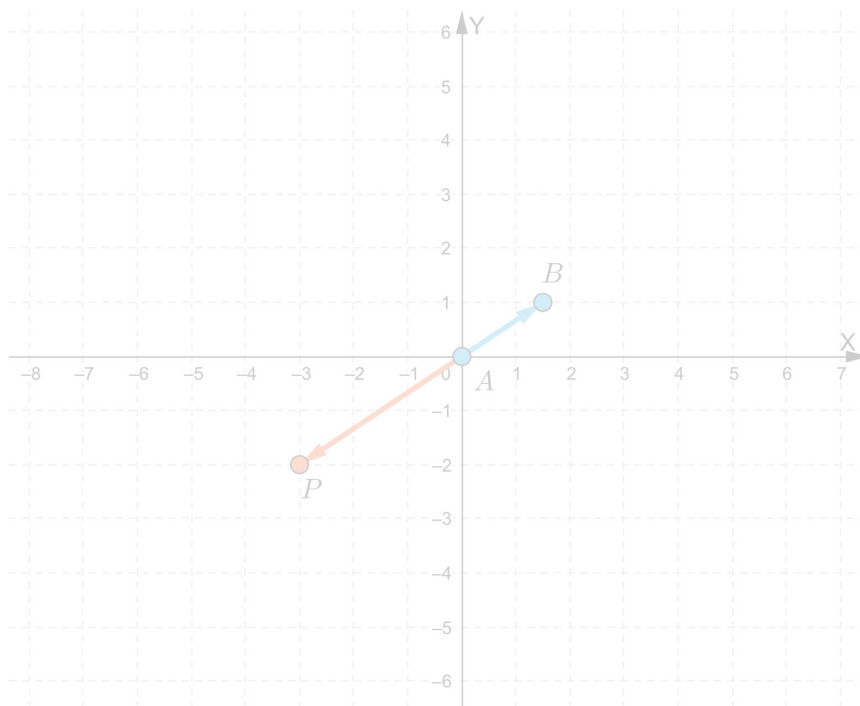
kryterium równoległości wektorów

dwa niezerowe wektory są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest iloczynem drugiego przez niezerową liczbę rzeczywistą

Aplet

Polecenie 1

Otwórz poniższy aplet. Zmieniając wartości parametru a obserwuj, jak zmienia się wektor $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, a następnie rozwiąż poniższe zadania.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DNlt4XfPZ>

Polecenie 2

Rozwiąż test zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wiadomo, że $\vec{AP} = a \cdot \vec{AB}$, gdzie $\vec{AB}$ nie jest wektorem zerowym, zaś a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytanie		
dla $a = 2$ punkt P należy do	półprostej AB ☐	prostej AB ☐
dla $a = -2$ punkt P należy do	półprostej AB ☐	prostej AB ☐
dla $a = -\frac{1}{2}$ punkt P należy do	odcinka AB ☐	półprostej AB ☐
dla $a = \frac{1}{2}$ punkt P należy do	odcinka AB ☐	półprostej AB ☐

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że $\vec{AP} = a \cdot \vec{AB}$, gdzie $\vec{AB}$ nie jest wektorem zerowym, zaś a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytanie		
dla każdego $a \in (1, 2)$ punkt P należy do	półprostej AB ☐	prostej AB ☐
dla każdego $a \in (-2, -1)$ punkt P należy do	półprostej AB ☐	prostej AB ☐
dla każdego $a \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ punkt P należy do	odcinka AB ☐	półprostej AB ☐
dla każdego $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ punkt P należy do	odcinka AB ☐	półprostej AB ☐

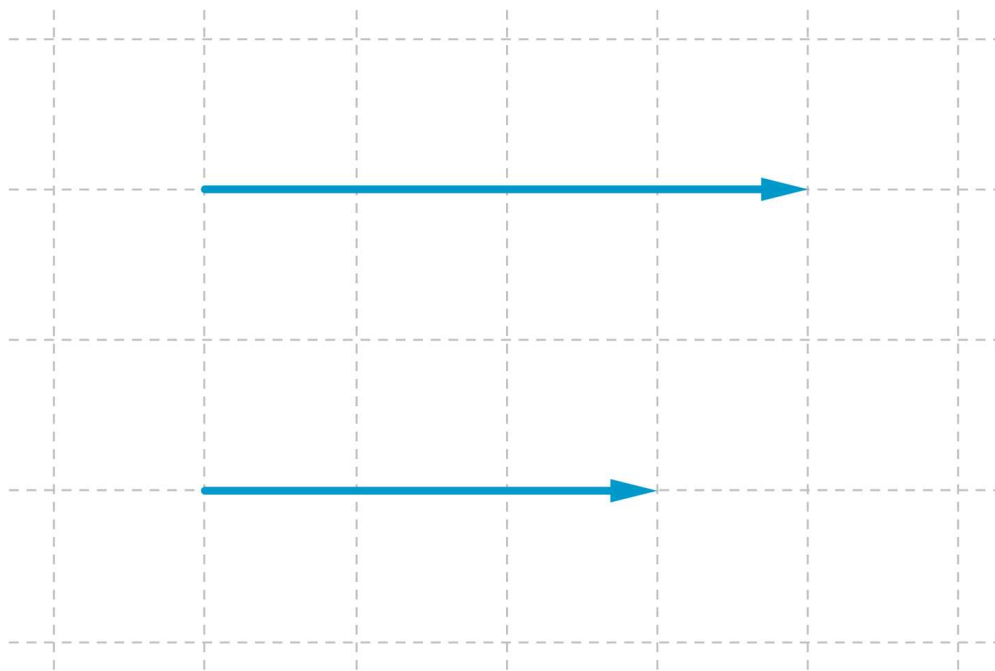
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem. Czy jeden z przedstawionych wektorów jest iloczynem drugiego przez liczbę $\frac{3}{4}$?



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

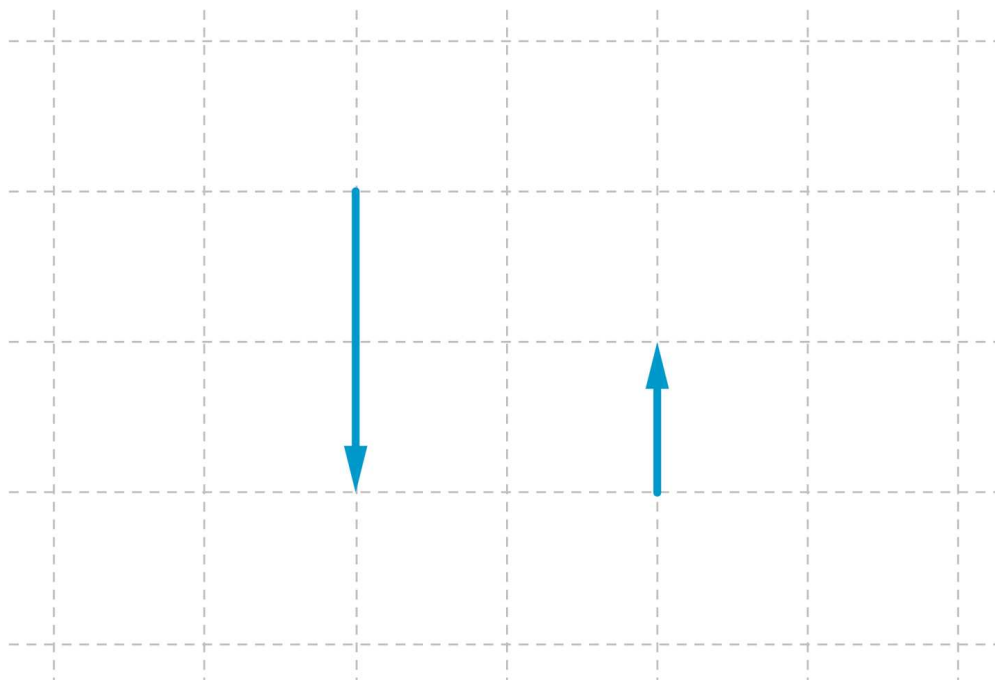
☐ nie

☐ tak

Ćwiczenie 5



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem. Czy jeden z przedstawionych wektorów jest iloczynem drugiego przez liczbę $\frac{3}{2}$?



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ nie

☐ tak

Ćwiczenie 6



Wiadomo, że $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, gdzie $\overrightarrow{AB}$ jest niezerowym wektorem, zaś a jest liczbą rzeczywistą należącą do podanego przedziału. Jaką figurę tworzy zbiór wszystkich punktów P , spełniających podany warunek? Połącz w pary.

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle 0, 1 \rangle$$

Odcinek od A do B wraz z punktem A ,
ale bez punktu B

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle 0, 1 \rangle$$

Odcinek od A do B wraz z punktem B ,
ale bez punktu A .

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in (0, 1)$$

Odcinek od A do B wraz z punktami A
i B .

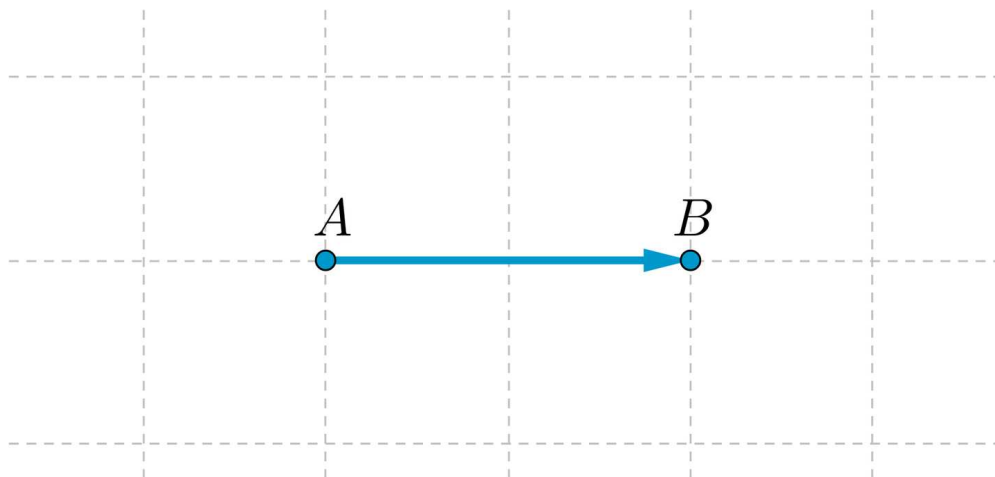
$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in (0, 1)$$

Odcinek od A do B bez punktów A i B
.

Ćwiczenie 7



Wiadomo, że $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, gdzie $\overrightarrow{AB}$ jest niezerowym wektorem przedstawionym na rysunku i $|\overrightarrow{AB}| = 2$, zaś a jest liczbą rzeczywistą należącą do podanego przedziału. Jaką figurę tworzy zbiór wszystkich punktów P , spełniających podane warunki?



Połącz w pary.

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle 1, 3 \rangle$$

Odcinek o długości 4, którego początkiem jest punkt B .

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle 0, 2 \rangle$$

Odcinek o długości 4, którego środkiem jest punkt B .

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle -2, 0 \rangle$$

Odcinek o długości 4, którego końcem jest punkt A .

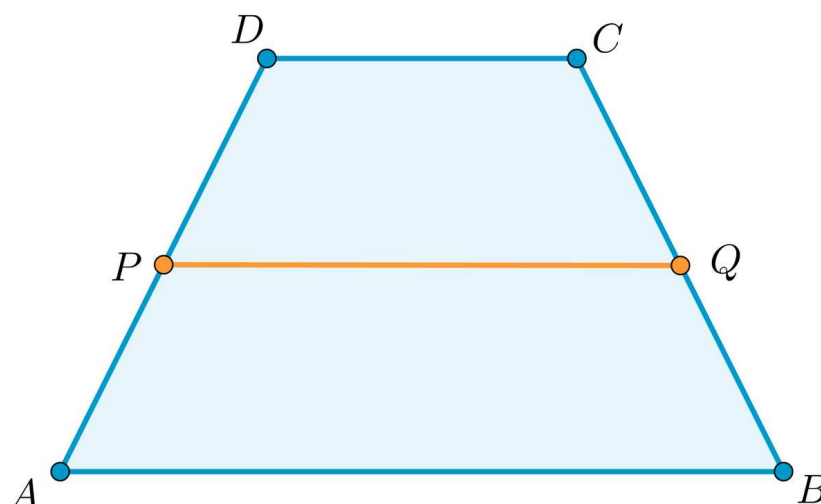
$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}, a \in \langle -1, 1 \rangle$$

Odcinek o długości 4, którego środkiem jest punkt A .

Ćwiczenie 8



Rysunek poniżej przedstawia trapez, w którym odcinek łączący środki ramion figury jest równoległy do jego podstaw oraz ma długość równą średniej arytmetycznej długości tych podstaw.



Uporządkuj poniższe wypowiedzi tak, aby powstał dowód twierdzenia.

Najpierw zauważmy, że przy oznaczeniach jak na rysunku prawdziwe są równości

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$$

Stąd wynika $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (a + 1) \overrightarrow{DC}$, co oznacza, że wektory $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe.

Ponieważ wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe i mają zgodne zwroty, więc istnieje taka liczba dodatnia a , że $\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{DC}$, zatem ostatnia równość jest równoważna $2\overrightarrow{PQ} = a \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} = (a + 1) \overrightarrow{DC}$.

Po dodaniu powyższych równań stronami otrzymujemy równanie

$$2\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ})$$

Ponieważ wektory $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AB}$ również są równoległe to suma długości wektorów

$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ jest równa dwukrotności długości wektora $\overrightarrow{PQ}$, równoważnie długość wektora $\overrightarrow{PQ}$ jest równa połowie sumy długości wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, co kończy dowód.

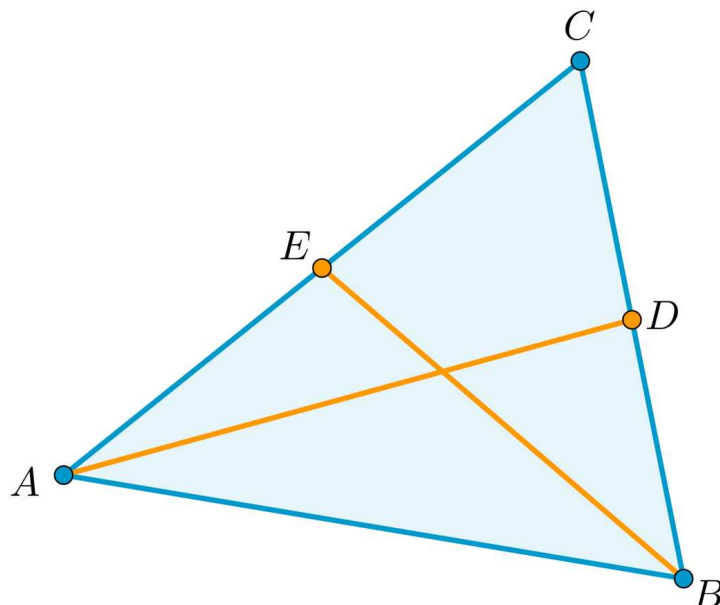
Ponieważ $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$ oraz $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$, więc powyższe równanie przyjmuje postać $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Pozostaje tylko pokazać zależność między długościami podstaw i odcinka łączącego środki ramion.

Ćwiczenie 9



Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest równa połowie długości tego boku.



Uzupełnij luki.

Przy oznaczeniach jak na rysunku $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Zatem $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

czyli $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{DE}$ $\overrightarrow{AB}$,

.

jest połową długości wektora

są równoległe

co kończy dowód

skąd wynika, że wektory

długość wektora

zachodzą równości

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoległość wektorów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz wektory równoległe.
- Wykorzystasz warunek równoległości wektorów do dowodzenia twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda sytuacyjna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Równoległość wektorów” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Równoległość wektorów” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Równoległość wektorów”).

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie wektora](#)
- [Wektory równe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Równoległość wektorów”.