Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie o trzech ciągach

Źródło: Aaron Burden, dostępny w internecie: unplash.com, domena publiczna.

Twierdzenie o trzech ciągach jest jednym z narzędzi używanych do badania czy dany ciąg jest zbieżny i jaką ma granicę. Twierdzenie to ma swoją (nieco żartobliwą) interpretację w postaci twierdzenia o policjantach: Jeśli idziesz pomiędzy dwoma policjantami i Ci policjanci zmierzają na ten sam komisariat, to Ty również tam zmierzasz. W tym temacie poznamy matematyczną interpretację tego twierdzenia.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie o trzech ciągach.
- Uzasadnisz zbieżność pewnych ciągów, korzystając z twierdzenia o trzech ciągach.
- Obliczysz granicę ciągów wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach.

Przeczytaj

Temat ten poświęcimy przedstawieniu ważnego narzędzia, które pozwala stwierdzać zbieżność ciągu oraz wyznaczać jego granicę. Jest to twierdzenie o trzech ciągach. Intuicyjnie mówi ono, że jeśli uda nam się ograniczyć ogólny wyraz ciągu z góry oraz z dołu przez ogólne wyrazy ciągów zbieżnych do tej samej granicy, to wyjściowy ciąg też jest zbieżny do tej samej granicy. Formalnie można je zapisać następująco.

Twierdzenie: o trzech ciągach

Niech dane będą nieskończone ciągi $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$. Jeżeli dla prawie wszystkich wyrazów tych ciągów zachodzą nierówności

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

oraz

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = g, \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = g,$$

to wówczas również

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = g.$$

Poniższe przykłady pokazują w jaki sposób można użyć powyższego twierdzenia do stwierdzania zbieżności ciągu i obliczenia jego granicy.

Przykład 1

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{3^n+7^n}$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{3^n+7^n}$$

oraz

$$\sqrt[n]{3^n+7^n} \leq \sqrt[n]{7^n+7^n} = \sqrt[n]{2\cdot 7^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 7.$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$7 \leq \sqrt[n]{3^n+7^n} \leq \sqrt[n]{2}\cdot 7$$

Mamy więc dwa ciągi $b_n = 7$ oraz $c_n = \sqrt[n]{2}\cdot 7$ takie, że

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 7 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = 7\cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 7\cdot 1 = 7$$

Ponieważ ciągi b_n oraz c_n są zbieżne do tej samej granicy równej 7 więc z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7.$$

Przykład 2

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{2^{-n}-3^{-n}+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}.$$

Na początek zauważmy, że

$$\sqrt[n]{2^{-n}-3^{-n}+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+\left(\tfrac{1}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}.$$

Ponadto dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy

$$\sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} \le \sqrt[n]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3}\cdot\tfrac{2}{3}$$

oraz

$$\tfrac{2}{3} = \sqrt[n]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} \le \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}.$$

Zatem

$$\tfrac{2}{3} \le \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n+\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} \le \sqrt[n]{3}\cdot\tfrac{2}{3}$$

Ponieważ pierwszy i trzeci ciąg w powyższych nierównościach są zbieżne do granicy równej $\frac{2}{3}$ więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\tfrac{1}{2})^n-(\tfrac{1}{3})^n+(\tfrac{2}{3})^n} = \tfrac{2}{3}$$

Przykład 3

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \tfrac{2n+(-1)^n}{3n+5}.$$

Zauważmy, że wyrażenie $(-1)^n$ przyjmuje tylko dwie wartości: 1 lub -1 więc dla każdego $n\in\mathbb{N}$ wyraz ogólny ciągu możemy oszacować w następujący sposób

$$\tfrac{2n-1}{3n+5} \le \tfrac{2n+(-1)^n}{3n+5} \le \tfrac{2n+1}{3n+5}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n+5} = \frac{2}{3}.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3n+\cos n}{n+1}.$$

Ponieważ $-1 \leq \cos n \leq 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc wyraz ogólny ciągu a_n możemy oszacować następująco

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq \frac{3n+\cos n}{n+1} \leq \frac{3n+1}{n+1}.$$

Po lewej oraz prawej stronie otrzymaliśmy ciągi $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$ oraz $c_n = \frac{3n+1}{n+1}$. Ponieważ

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 3$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach wnisokujemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

Na koniec podamy jeszcze jedno twierdzenie.

Twierdzenie: o zachowaniu nierówności

Niech dane będą nieskończone ciągi (a_n), (b_n). Jeżeli dla prawie wszystkich wyrazów tych ciągów zachodzi nierówność

$$a_n < b_n$$

oraz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} b_n = b,$$

to

$$a \leq b.$$

Przykład 5

Rozważmy ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{n+1}.$$

Z faktu, że $-1 < \sin n < 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wynika, że $\sin^2 n < 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{\sin^2 n}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Z przytoczonej powyżej własności wnioskujemy zatem, że

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n}{n+1} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Ponieważ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, więc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n}{n+1} \leq 0.$$

Z drugiej strony jasne jest, że $\frac{\sin^2 n}{n+1} \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co wraz z ostatnią nierównością oznacza, że

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n}{n+1} = 0.$$

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu poza co najwyżej skończoną ich ilością

Animacja

Polecenie 1

Poniżej znajduje się animacja, na której przedstawiono dowód twierdzenia o trzech ciągach. Zapoznaj się z nią a następnie wykonaj umieszczone pod nią polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgIg3NSOI

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej twierdzenia o trzech ciągach.

Polecenie 2

Korzystając z twierdzenia trzech ciągach, wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^{2n} + 2^n}$$

Polecenie 3

Korzystając z twierdzenia trzech ciągach, wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2}{\sqrt[n]{3^n + 6^n}}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o trzech ciągach

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o trzech ciągach do wyznaczania granic pewnych ciągów zbieżnych,
- stosuje twierdzenie o zachowaniu nierówności przy przejściu do granicy,
- tworzy algorytm wyznaczający granicę ciągów zbieżnych z zastosowaniem twierdzenia o trzech ciągach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Twierdzenie o trzech ciągach".

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się". Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- Pojęcie ciągu

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Twierdzenie o trzech ciągach”.