Środek okręgu opisanego na trójkącie

Środek okręgu opisanego na trójkącie

Źródło: dostępny w internecie: BarBus z Pixabay, domena publiczna.

Każdemu z nas zdarzyło się wskazywać miejsce spotkania, mając na uwadze, by każdy miał taką samą odległość do pokonania. Dzięki temu materiałowi nauczymy się, jak precyzyjnie wskazać takie miejsce dla trzech osób, których położenie nie jest współliniowe (osoby nie stoją wzdłuż jednej prostej). Trzy punkty na płaszczyźnie, które nie są współliniowe wyznaczają trójkąt. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie punktu, który będzie równooddalony od każdego wierzchołka. Punkt ten, to środek okręgu opisanego na trójkącie.

Twoje cele

- Wskażesz, gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie.
- Wyznaczysz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie.
- Określisz miary kątów wewnętrznych w trójkącie, jeżeli jest opisany na nim okrąg.

Przeczytaj

Na początku przypomnimy:

Twierdzenie: o symetralnych boków trójkąta

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Reguła: środek okręgu opisanego na trójkącie

Środek okręgu opisanego na trójkącie:

- ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta;
- prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej;
- rozwartokątnym leży na zewnątrz trójkąta.

Ważne!

Promień okręgu opisanego na trójkącie oznaczamy R.

R – **jest odległością środka okręgu od wierzchołków trójkąta.**

Przykład 1

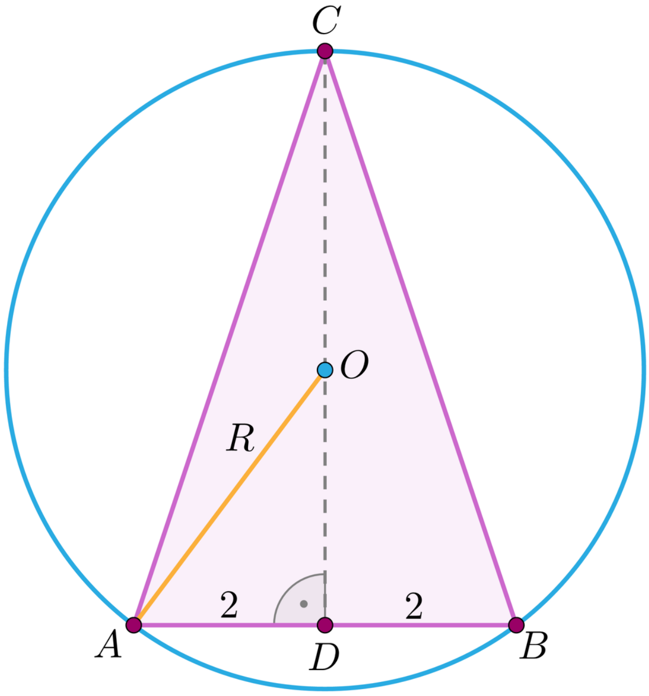
Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, zaś D – spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB. Obliczymy długość promienia tego okręgu, jeśli:

a) $|CD| = 5$ i $|AB| = 4$,

b) $|CD| = 3$ i $|AB| = 8$.

Rozwiązanie

a) Skoro $|CD| = 5$ i $|AB| = 4$, to trójkąt ABC jest trójkątem ostrokątnym:



Zwróćmy uwagę, że $|OD| = |CD| - |CO| = 5 - R$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ADO, otrzymujemy:

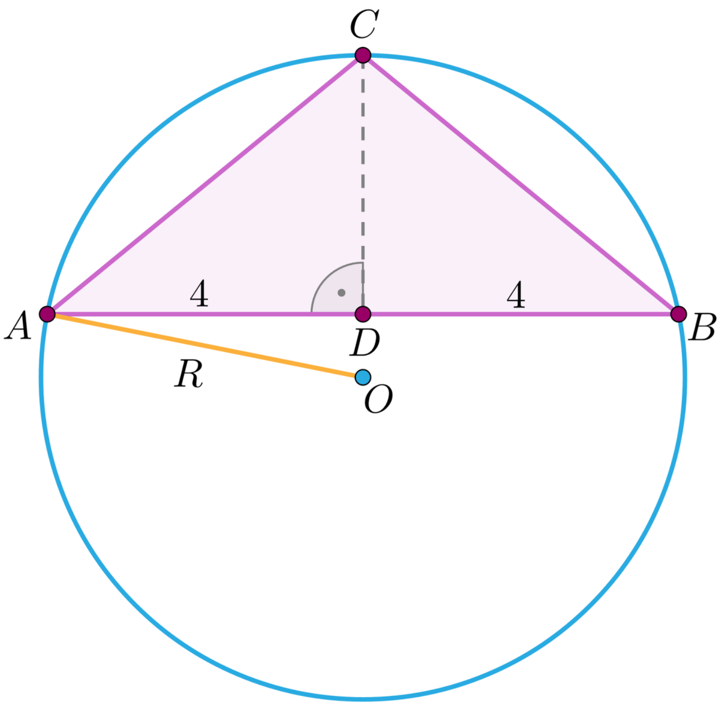
$R^2 = (5 - R)^2 + 2^2$

$R^2 = 25 - 10R + R^2 + 4$

$10R = 29$

$R = 2,9$

b) Skoro $|CD| = 3$ i $|AB| = 8$, to trójkąt ABC jest trójkątem rozwartokątnym:



Z ilustracji graficznej widzimy, że $|OC| = R$, zaś $|OD| = R - 3$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ADO otrzymujemy:

$R^2 = (R-3)^2 + 4^2$

$R^2 = R^2 - 6R + 9 + 16$

$6R = 25$

$R = 4\frac{1}{6}$

Przykład 2

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym:

a) równoramiennym o przyprostokątnej długości $6\ \text{cm}$,

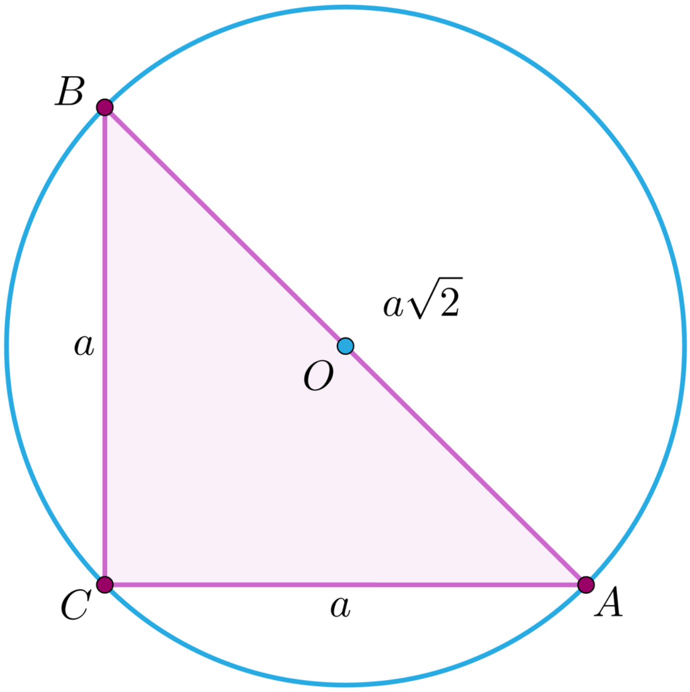
b) o przyprostokątnych długości $15\ \text{cm}$ i $8\ \text{cm}$.

Rozwiązanie

a) Skoro mamy trójkąt prostokątny, to wiemy już, że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej, zatem długość promienia tego okręgu równa jest połowie długości przeciwprostokątnej.

$R = \frac{1}{2}c$, gdzie c jest długością przeciwprostokątnej.

Na początek przypomnijmy sobie zależności, jakie są charakterystyczne dla trójkąta prostokątnego równoramiennego.



Nasze przyprostokątne są długości 6 cm, zatem przeciwprostokątna jest długości $6\sqrt{2}$ cm.

$R = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ [cm]

b) Wiemy, że potrzebujemy długości przeciwprostokątnej, zatem stosujemy twierdzenie Pitagorasa, by ją obliczyć.

Załóżmy, że nasza przeciwprostokątna, to c, wówczas otrzymujemy:

$c^2 = 15^2 + 8^2$

$c^2 = 225 + 64$

$c^2 = 289$

$c = 17$ [cm]

Znając długość przeciwprostokątnej, obliczymy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

$R = \frac{1}{2} \cdot 17 = 8,5$ [cm].

Własność: długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

W trójkącie równobocznym symetralne zawierają wysokości tego trójkąta, które przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka.

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Przykład 3

Obliczymy długość promienia koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $36\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Na początek korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ obliczymy długość boku trójkąta.

$36\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$a^2 = 144$

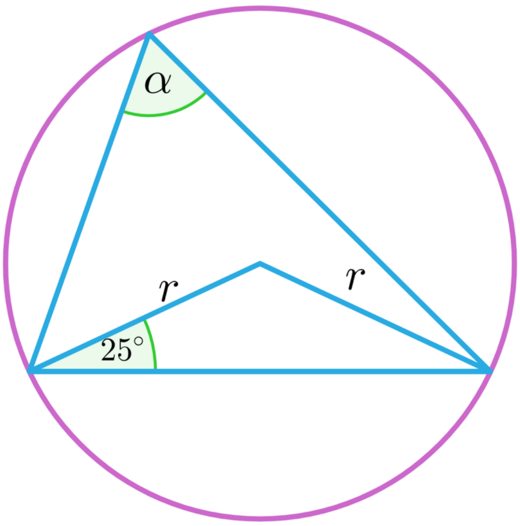
$a = 12$

Mając długość boku, bez problemu obliczymy R.

$R = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

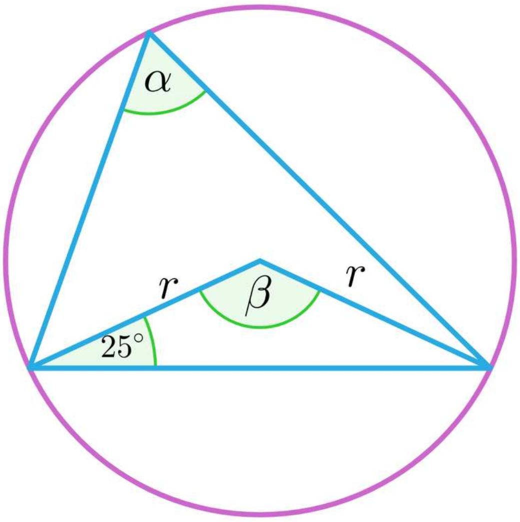
Przykład 4

Wyznaczymy miarę kąta α z rysunku.



Rozwiązanie

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia na rysunku.



Zauważmy, że trójkąt o kątach 25°, β oraz bokach długości r jest równoramienny, zatem:

$\beta = 180^{\circ} - 2 \cdot 25^{\circ} = 130^{\circ}$

Ponieważ α jest kątem wpisanym, a β kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt α, to z własności kątów wpisanych i środkowych w kole mamy

$\beta = 2\alpha$, czyli $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

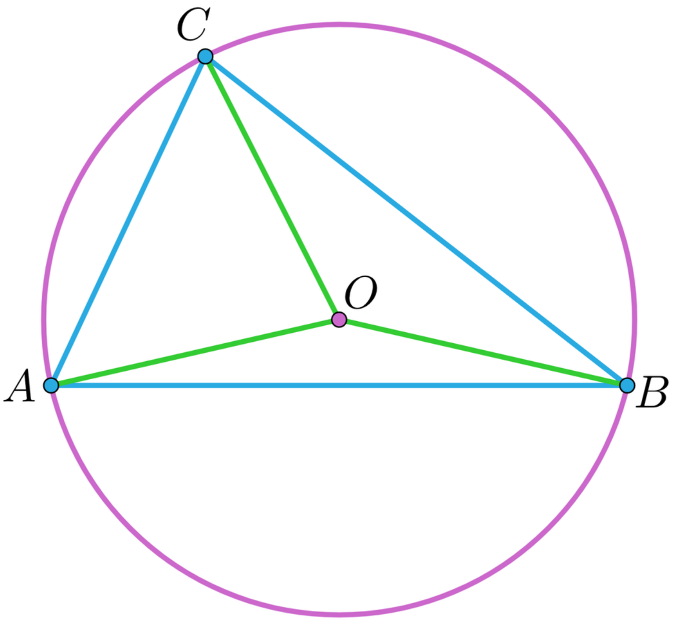
Zatem $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 130^{\circ} = 65^{\circ}$.

Przykład 5

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACO jest cztery razy większy od kąta BAO, a miara kąta CBO jest o 12° większa od miary kąta ABO. Obliczymy miary kątów trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Narysujmy okrąg o środku w punkcie O opisany na trójkącie ABC i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Niech $|\sphericalangle BAO| = \alpha$.

Wobec tego $|\sphericalangle ACO| = 4\alpha$.

Zauważmy, że trójkąty ABO, BCO oraz ACO są równoramienne.

Zatem:

$|\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle CAO| = 4\alpha$

$|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle ABO| = \alpha$

$|\sphericalangle BCO| = |\sphericalangle CBO| = \alpha + 12^\circ$

Wobec faktu, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°, by wyznaczyć wartość α, rozwiązujemy równanie:

$4\alpha + 4\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 12^\circ + \alpha + 12^\circ = 180^\circ$

$12\alpha = 156^\circ$

$\alpha = 13^\circ$

Zatem miary kątów trójkąta ABC wynoszą:

$|\sphericalangle BAC| = 13^\circ + 52^\circ = 65^\circ$

$|\sphericalangle ACB| = 52^\circ + 25^\circ = 77^\circ$

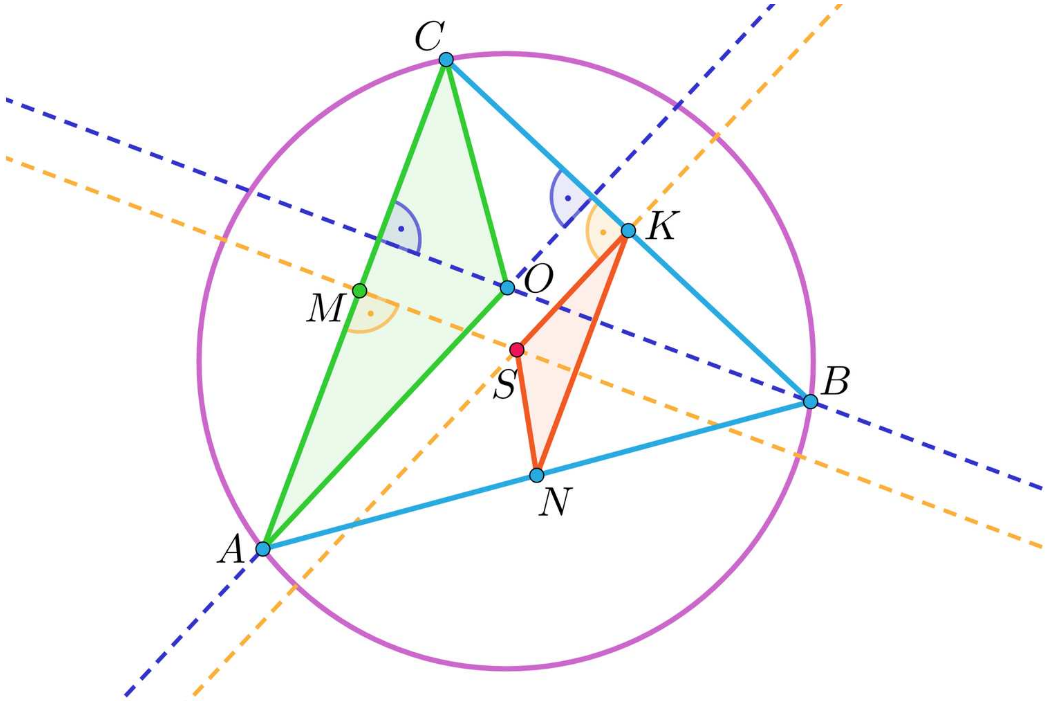
$|\sphericalangle ABC| = 13^\circ + 25^\circ = 38^\circ$

Przykład 6

Pokażemy, że odległość wierzchołka trójkąta ABC od ortocentrum jest dwa razy dłuższa od odległości środka okręgu opisanego na trójkącie ABC od środka przeciwległego boku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



gdzie O oznacza ortocentrum trójkąta ABC, zaś S – środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zauważmy, że trójkąty ACO i KNS są podobne, gdyż $AO \parallel SK$, $CO \parallel SN$ oraz $AC \parallel KN$, co oznacza, że: $|\sphericalangle COA| = |\sphericalangle KSN|$, $|\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle KNS|$ i $|\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle SKN|$. Ponieważ odcinek KN jest odcinkiem środkowym trójkąta ABC, to skala tego podobieństwa wynosi $\frac{1}{2}$.

To oznacza, że: $|SK| = \frac{1}{2}|AO|$ co należało udowodnić.

Słownik

symetralna

symetralna boku to prosta prostopadła do tego boku, przechodząca przez jego środek; istotną własnością symetralnej jest fakt, że punkt leżący na niej jest równooddalony od końców tego odcinka

okrąg opisany na trójkącie

okrąg jest opisany na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta leżą na okręgu; wówczas powiemy, że trójkąt jest wpisany w okrąg

ortocentrum

punkt przecięcia wysokości trójkąta

własności kątów wpisanych i środkowych w kole

1. miara kąta środkowego jest dwa razy większa niż miara kąta wpisanego opartego na tym samym łuku
2. miary kątów wpisanych opartych na tym samym łuku są równe

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Trójkąt, którego boki są liniami środkowymi, nazywamy trójkątem środkowym. Uruchom symulację i obserwuj zależność długości promienia okręgu opisanego na trójkącie środkowym DEF od długości promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DIXctkolM

Polecenie 2

Jaka jest zależność między długościami promieni okręgów opisanych na trójkącie i jego trójkącie środkowym? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

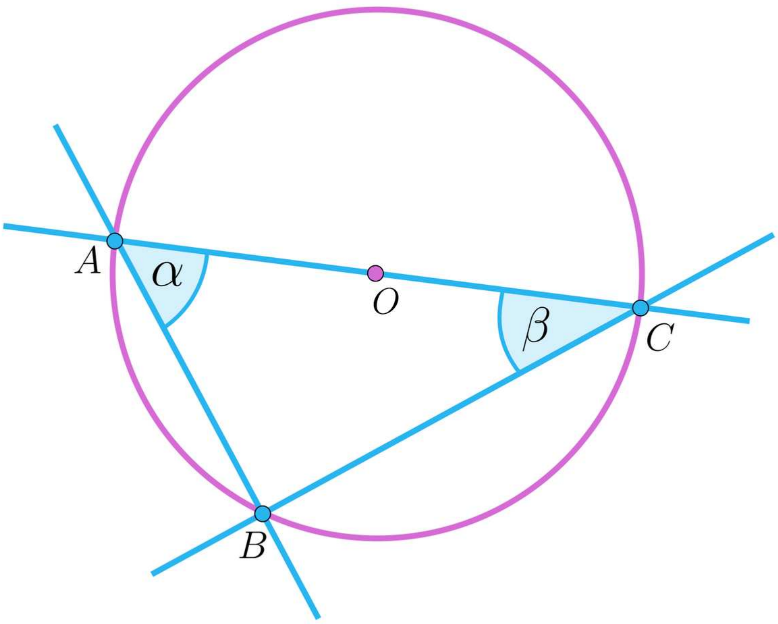
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Odcinek AC jest średnicą okręgu o środku w punkcie O. Punkt B leży na tym okręgu. Wyznacz miary kątów tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że $2\alpha - \beta = 60^\circ$.

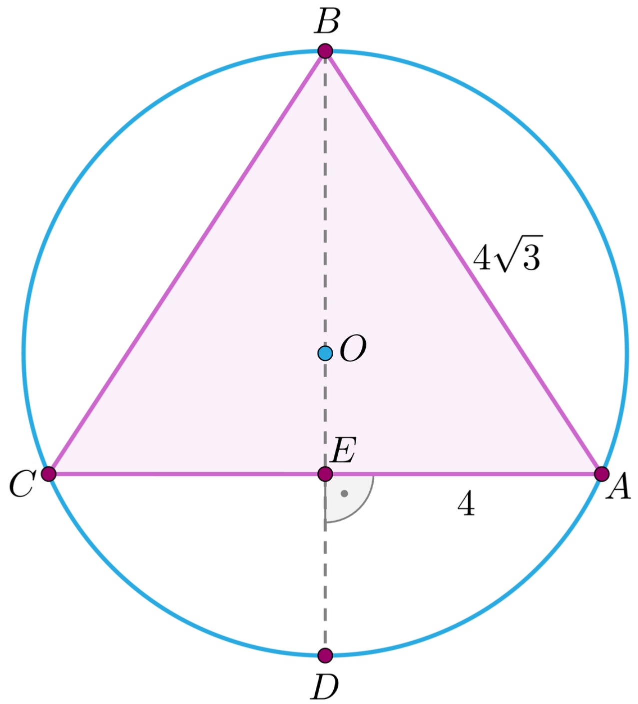


Ćwiczenie 8

Na trójkącie o bokach $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{23}$ opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

Ćwiczenie 9

Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Oblicz długość promienia R okręgu i pole tego trójkąta.



Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Alabrudzińska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Środek okręgu opisanego na trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje, gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie;
- wyznacza długość promienia okręgu opisanego na trójkącie;
- określa miary kątów wewnętrznych w trójkącie, jeżeli jest opisany na nim okrąg.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka w oparciu o symulację interaktywną;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów;
- technika świateł drogowych.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e–podręcznik
- celofan, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają informacje o okręgu opisanym na trójkącie.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj” i aplecie.
2. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, wyjaśnia wątpliwości.
3. Nauczyciel wyświetla symulację interaktywną i prowadzi rozmowę tak, by uczniowie odpowiedzieli na pytanie z Polecenia 2. Nauczyciel uzasadnia prawdziwość wniosku w oparciu o rozwiązanie tego polecenia.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 4 – 9 na czas. Grupa, która rozwiąże poprawnie ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy, wątpliwości omawiane.

Faza podsumowująca:

- Na koniec zajęć nauczyciel przypomina uczniom cel lekcji i kryteria sukcesu. Pyta, używając techniki świateł drogowych, o stopień ich realizacji.

Praca domowa:

- Uczniowie jako zadanie domowe wykonują ćwiczenia 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można wykorzystać podczas realizacji tematu „Własności okręgu opisanego na trójkącie”.