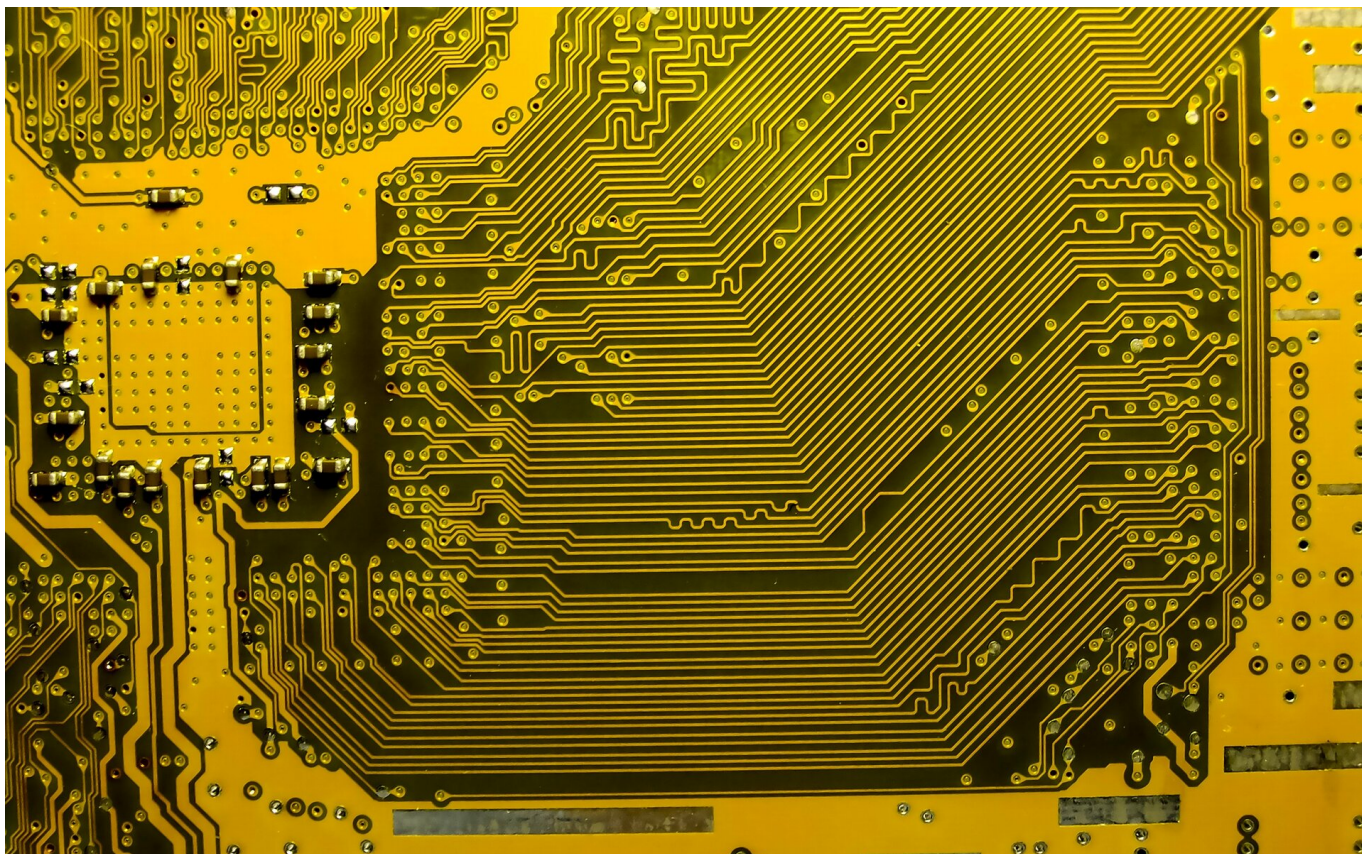
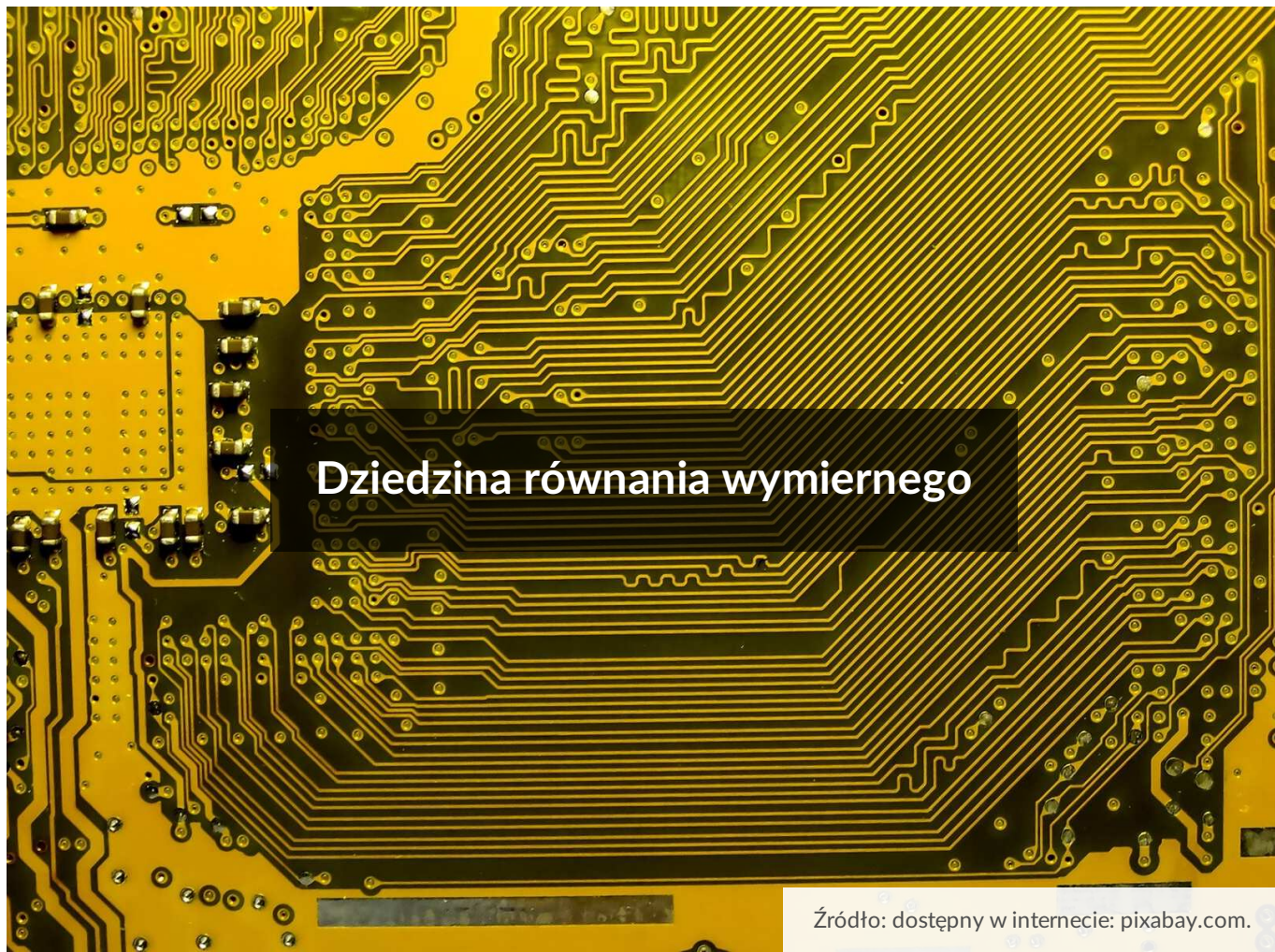




Dziedzina równania wymiernego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W równaniach liniowych, kwadratowych i równaniach wielomianowych wyższych stopni dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. W równaniach wymiernych niewiadoma pojawia się w mianowniku. Dlatego miejsca zerowe mianownika należy wyłączyć ze zbioru, w którym rozwiązujemy równanie.

W tym materiale zajmiemy się wyznaczaniem dziedziny równania wymiernego, czyli zbioru liczb rzeczywistych pomniejszonego o zbiór pierwiastków mianownika równania.

Twoje cele

- Określisz, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$) to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy **równaniem wymiernym** z jedną niewiadomą x .

Dziedziną równania wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Przykład 1

Określimy dziedzinę równania $\frac{2}{x(x+1)} = 0$.

Niech $P(x) = x(x+1)$.

Obliczymy miejsca zerowe wielomianu $P(x)$.

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Przykład 2

Określimy **dziedzinę równania wymiernego** $\frac{x}{x^2+3} = 1$.

Wyrażenie $x^2 + 3 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Zatem $D = \mathbb{R}$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przykład 3

Która z podanych liczb $-2, -1, 3, 6$ nie należy do dziedziny równania $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = 0$?

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$(x - 2)(x - 3) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ i } x \neq 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

$$x = 3 \notin D$$

Liczba $x = 3$ nie należy do dziedziny równania.

Przykład 4

Wyznamy dziedzinę równania $\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-9} = 1$.

Lewa strona **równania** jest sumą dwóch ułamków algebraicznych.

Mianownik każdego z tych ułamków musi być różny od zera.

Zatem:

$$\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3 \text{ i } x \neq 3 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}.$$

Przykład 5

Rowerzysta przejechał 120 km, pokonując codziennie tyle samo kilometrów.

Gdyby każdego dnia podróży przejeżdżał o 10 km więcej, to jego podróż trwałaby o 1 dzień krócej. Ile dni podróżował rowerzysta?

Wyznamy dziedzinę równania i rozwiążemy równanie.

Niech:

x – liczba dni, w czasie których rowerzysta przejechał 120 km,

$\frac{120}{x}$ – liczba kilometrów przejechanych przez rowerzystę w ciągu jednego dnia,

$\frac{120}{x-1}$ – liczba kilometrów przejechanych przez rowerzystę, gdyby codziennie przejeżdżał o 10 km więcej.

$x > 1$ i $x \in \mathbb{N}$ ponieważ podróż rowerzysty musi trwać co najmniej 2 dni.

Zapiszemy równanie.

$$\frac{120}{x} + 10 = \frac{120}{x-1} \quad | \cdot x(x-1)$$

$$120 \cdot (x-1) + 10x(x-1) = 120x \quad | : 10$$

$$12x - 12 + x^2 - x = 12x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{1-7}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$$

Tylko liczba 4 spełnia warunki zadania.

Rowerzysta podróżował 4 dni.

Przykład 6

Wyznamy dziedzinę równania $\frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^3-6x^2+12x-8} = 0$.

Lewa strona równania jest sumą trzech ułamków algebraicznych.

Dla łatwiejszego ustalenia dziedziny rozłożymy mianownik każdego z ułamków na czynniki.

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^3} = 0$$

Czyli:

$$\begin{cases} 1. x(x-1) \neq 0 \\ 2. (x-1)(x-2) \neq 0 \\ 3. (x-2)^3 \neq 0 \end{cases}$$

$$1. x(x-1) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq 1$$

$$2. (x-1)(x-2) \neq 0$$

$$x \neq 1 \text{ i } x \neq 2$$

$$3 \cdot (x-2)^3 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \not\equiv 0$)

dziedzina równania wymiernego

dziedziną równania wymiernego $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, $P(x) \not\equiv 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Przeanalizuj sposób wyznaczania dziedziny równania wymiernego oraz analizy zadania tekstowego prowadzącego do rozwiązania równania wymiernego z uwzględnieniem dziedziny.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcxEkMNXI>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dziedziny równania wymiernego.

Polecenie 2

Określ, która z podanych liczb $(-\sqrt{2})$, (-1) , 0 , 3 nie należy do dziedziny równania

$$\frac{(x+1)^2}{x(x^2-2)(x^2+3)} = 1.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Określ dziedzinę równania $\frac{3x}{x(x-5)} = 0$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie liczby, które **nie** należą do dziedziny równania $\frac{(x+3)^2}{x(x^2-9)(x^2-3)} = 1$.

☐ -2

☐ 0

☐ 3

☐ 2

☐ -3

☐ $-\sqrt{3}$

☐ $\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3



Ile liczb **nie należy** do dziedziny równania $\frac{x+1}{(x^2+9)x^2(x+9)^2} = 0$?

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 2

Ćwiczenie 4



Przeciągnij poprawne równanie w wyznaczone miejsce.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych.

$\frac{1}{x(x+1)} = 0$

$\frac{3}{x(x^2+5)} = 0$

$\frac{x}{x^2+5} = 0$

$\frac{x}{x^2-5} = 0$

Ćwiczenie 5



Dane jest równanie $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = 0$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.	☐	☐
Do dziedziny równania należy liczba 2.	☐	☐
$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.	☐	☐
Suma liczb nienależących do dziedziny równania jest równa zero.	☐	☐

Ćwiczenie 6



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

Aby wyznaczyć dziedzinę równania $\frac{x}{x^3-x^2} + \frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{1}{x^3+9x^2+27x+27} = 1$ należy zapisać koniunkcję warunków:

$$x^2 \cdot \boxed{} \neq 0$$

i

$$(x-1) \cdot \boxed{} \neq 0$$

i

$$\boxed{} \neq 0$$

$$\boxed{(x+3)} \quad \boxed{(x+3)^3} \quad \boxed{(x+2)^3} \quad \boxed{(x-1)} \quad \boxed{(x+1)}$$

Ćwiczenie 7



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę, będącą rozwiązaniem zadania.

Rowerzysta przejechał 160 km, pokonując codziennie tyle samo kilometrów. Gdyby każdego dnia podróży przejechał o 40 km więcej, to jego podróż trwałaby o 2 dni krócej.

Ile dni podróżował rowerzysta?

Liczba dni = .

Ćwiczenie 8



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Dane jest równanie $\frac{(x-5)}{(x-1)(x^2+mx+n)} = 0$ z niewiadomą x .

Dla jakich wartości parametru m i n dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$?

$$m = \boxed{},$$

$$n = \boxed{}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dziedzina równania wymiernego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego
- przeprowadza rozumowania związane z analizą dziedziny równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów wyznaczania tych argumentów, dla których wielomian przyjmuje wartość zero, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie oglądają animację i analizują przykłady pokazujące sposoby wyznaczania dziedziny równania wymiernego.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Przykład 2 umieszczony pod animacją.

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą przeanalizować w parach.