Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Związki miarowe wynikające z twierdzenia Pitagorasa. Prezentacja multimedialna - twierdzenie Pitagorasa.

Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie: Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dowód

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt jest prostokątny.

Przykład 1

Sprawdź, czy trójkąt o bokach $9,\ 12$
i 15
jest trójkątem prostokątnym.
Jeżeli trójkąt będzie prostokątny, to przeciwprostokątną będzie najdłuższy z boków. Obliczmy kwadraty długości boków.
$9^2 = 81$
, $12^2 = 144$
, $15^2 = 225$
i zauważmy, że

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa ten trójkąt jest trójkątem prostokątnym.

Związki miarowe wynikające z twierdzenia Pitagorasa

Przekątna w kwadracie o boku a
ma długość

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Zatem w trójkącie równoramiennym prostokątnym długości boków pozostają w zależności.

Rozważmy teraz trójkąt równoboczny o boku a
. Jego wysokość liczymy w następujący sposób

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

jest więc równe

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Oznaczmy przez x najkrótszy z boków trójkąta prostokątnego, w którym kąty ostre mają miary $30°$ i $60°$. Wtedy długości boków tego trójkąta są równe $x, \ 2x, \ x\sqrt{3}$. O takim trójkącie mówi się czasami, że jest to „trójkąt piękny”.