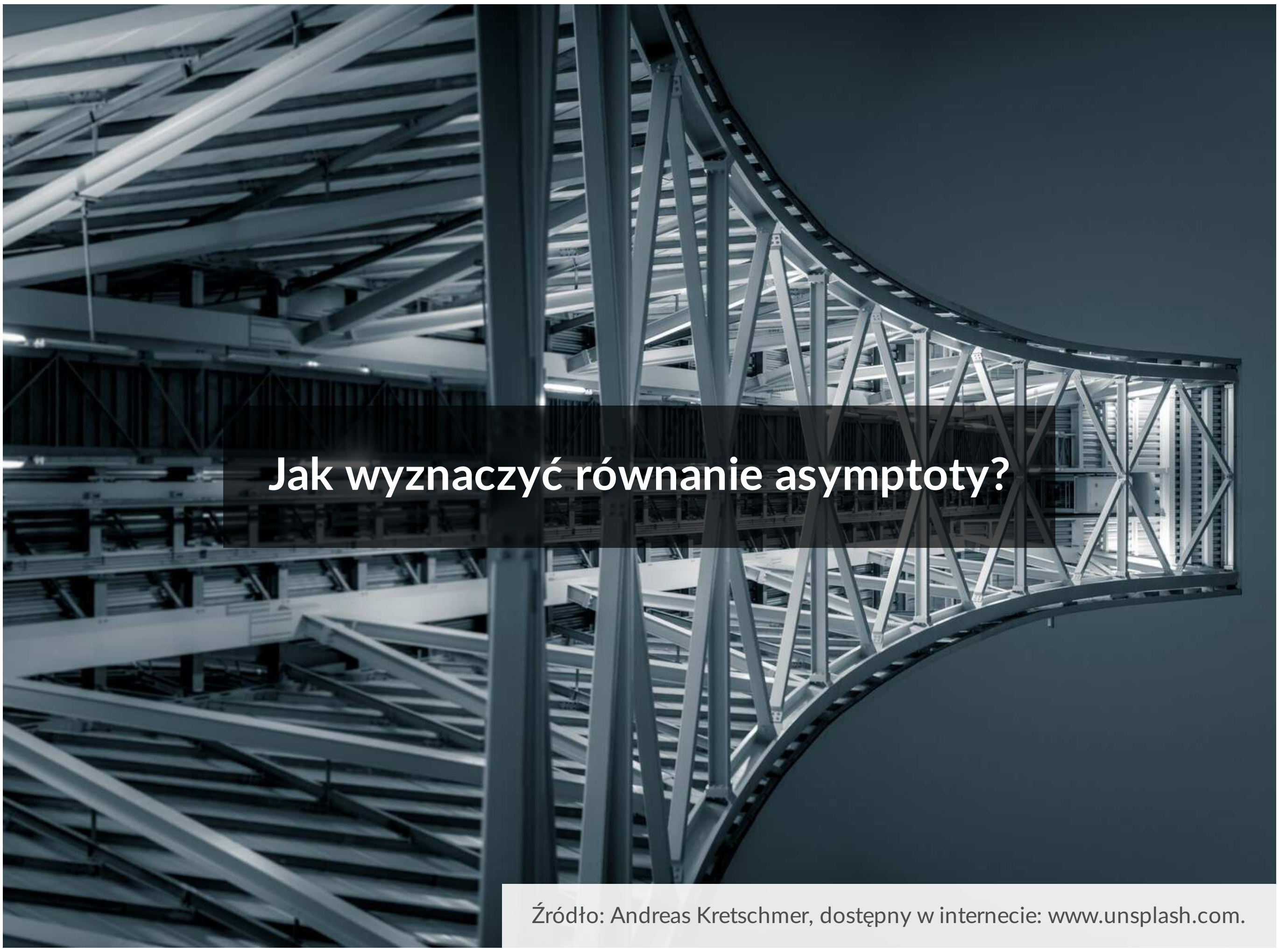
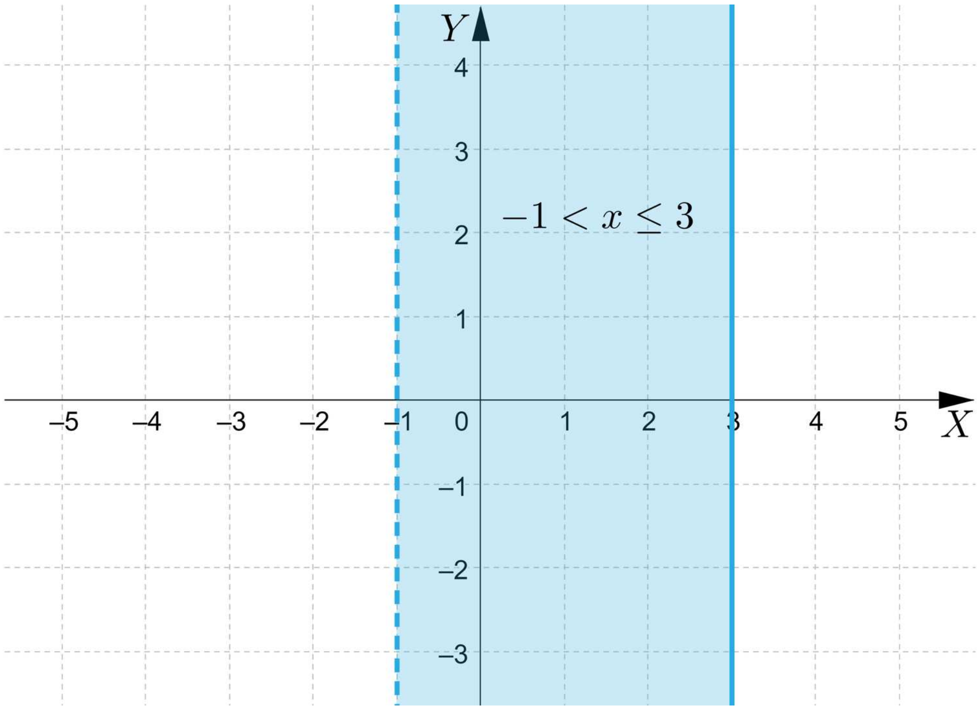
Jak wyznaczyć równanie asymptoty?

Jak wyznaczyć równanie asymptoty?



Źródło: Andreas Kretschmer, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Umiejętność wyznaczania równań asymptot wykorzystana jest m.in. w modelowaniu procesów. Wiele cech różnych systemów po początkowym okresie wzrostu wchodzi w okres stopniowego nasycenia, mając asymptotę równoległą do osi czasu. Znając popyt początkowy, szacując maksymalny popyt oraz prędkość jego wzrostu można wyznaczyć niezbędne parametry do optymalizacji strategii produkcji np. sprzedaży, usług czy nawet wydolność środowiska do utrzymania danego gatunku.



Twoje cele

- Wyznaczysz równania asymptot wykresu funkcji.
- Zastosujesz poznane metody wyznaczania równań asymptot pionowych, ukośnych i poziomych wykresu funkcji.
- Wykorzystasz poznane definicje i twierdzenia do rozwiązania zadań.

Przeczytaj

Asymptoty wykresów funkcji pozwalają lepiej wyobrazić sobie ich kształty. Nie są one częścią wykresu, a stanowią jedynie linie pomocnicze przy ich szkicowaniu.

Są trzy rodzaje asymptot:

- pionowe,
- poziome,
- ukośne.

Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej.

Aby wyznaczyć równania asymptot wykresu funkcji, rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny funkcji, którą zapisujemy w postaci sumy przedziałów. W punktach, w których funkcja jest nieokreślona, sprawdzamy istnienie asymptoty pionowej.

Następnie liczymy granice w plus i minus nieskończoności; jeżeli otrzymamy granicę właściwą, to możemy podać równanie asymptoty poziomej, natomiast gdy granice te są niewłaściwe, to szukamy asymptoty ukośnej.

Ponieważ asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej, zatem jeśli okaże się, że istnieje asymptota pozioma lewo lub prawostronna, to nie badamy istnienia asymptoty ukośnej.

Wyznaczanie równań asymptot pokażemy na poniższych przykładach.

> **Przykład 1**
>
> Podamy równania asymptot wykresu funkcji:
>
> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
>
> Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od podania dziedziny funkcji.
>
> Funkcja jest poprawnie określona dla $x > 0$, więc $D_f = (0, \infty)$.
>
> Licząc więc granicę na kończach przedziału otrzymamy: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
>
> oraz
>
> $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji f a prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji f.

Przykład 2

Podamy równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$.

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od podania dziedziny funkcji.

Funkcja jest określona dla $x^2 - 4 \neq 0$:

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ dla $x = -2$ i $x = 2$.

Stąd dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Dziedzinę zapisujemy w postaci sumy przedziałów, bo jest to wygodne przy liczeniu granic.

$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

Granice liczymy na końcach przedziałów wyznaczonych w dziedzinie:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 1.$$

Istnieje asymptota pozioma obustronna $y = 1$.

Aby policzyć granice jednostronne przy x dążącym do (-2) i x dążącym do 2 rozkładamy mianownik na czynniki: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^2-5\cdot(-2)}{0^-\cdot(-2-2)}\right] = \left[\frac{4+10}{0^-\cdot(-4)}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^2-5\cdot(-2)}{0^+\cdot(-2-2)}\right] = \left[\frac{4+10}{0^+\cdot(-4)}\right] = -\infty$$

Prosta $x = -2$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji.

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)} = \left[\frac{2^2-5\cdot2}{(2+2)\cdot0^-}\right] =$$

$$= \left[\frac{4-10}{4\cdot0^-}\right] = \left[\frac{-6}{4\cdot0^-}\right] = \infty$$

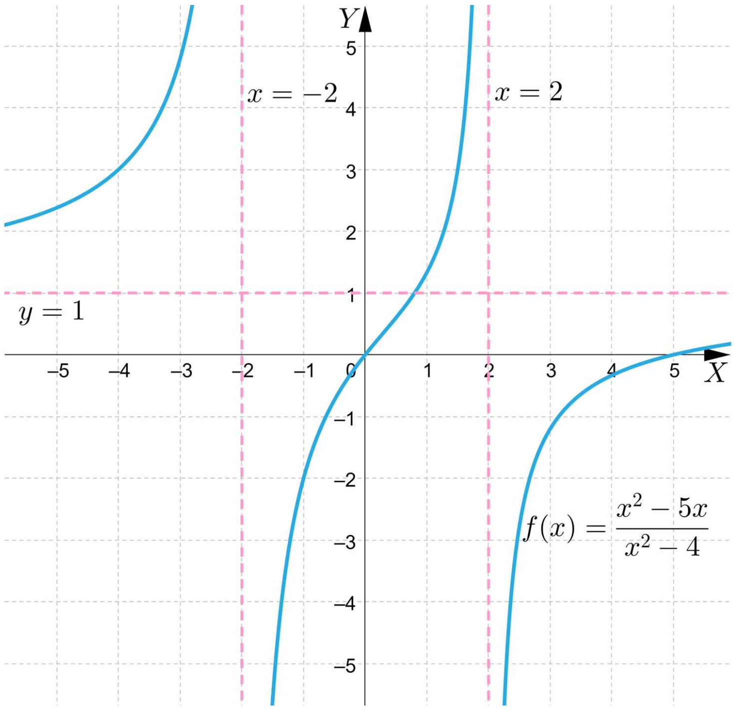
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)} = \left[\frac{2^2-5\cdot 2}{(2+2)\cdot 0^+}\right] =$$

$$= \left[\frac{4-10}{4\cdot 0^+}\right] = \left[\frac{-6}{4\cdot 0^+}\right] = -\infty$$

Prosta $x=2$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji.

Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej, dlatego też, ponieważ istnieje asymptota pozioma $y=1$, to nie badamy istnienia asymptoty ukośnej.

Zilustrujemy te asymptoty na wykresie funkcji $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$.



Odpowiedź:

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$ ma asymptotę poziomą obustronną $y=1$ oraz dwie asymptoty pionowe $x=-2$ i $x=2$.

Przykład 3

Podamy równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Zanim przejdziemy do wyliczenia dziedziny, funkcję $f(x)$ zapiszmy w postaci:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{x^2\cdot x}{x-2}} = |x|\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

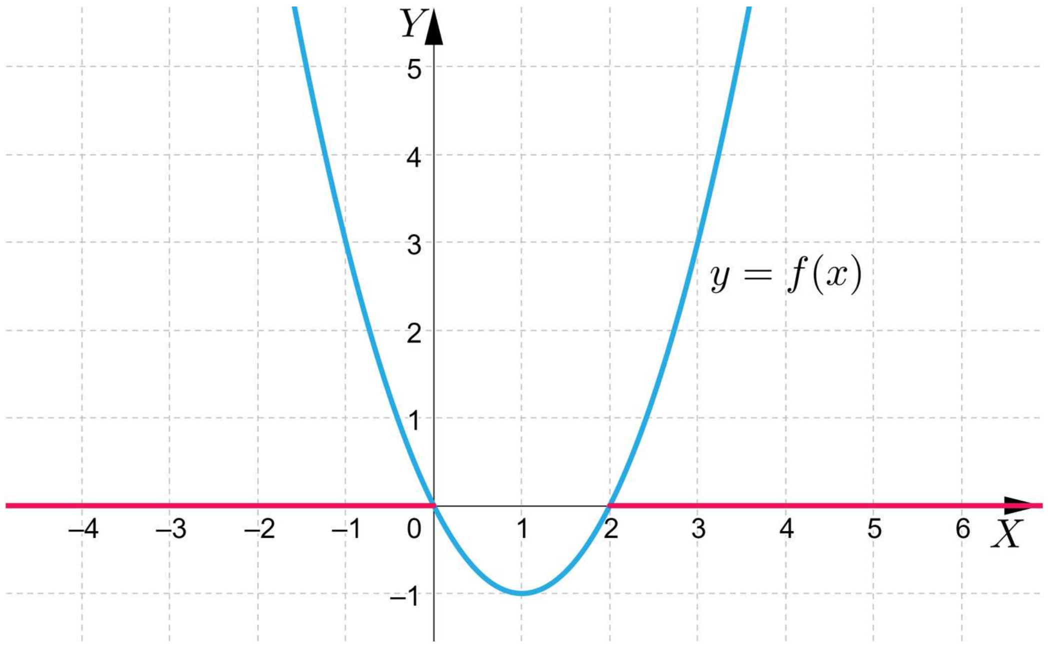
Skorzystaliśmy z własności $\sqrt{x^2} = |x|$.

Funkcja $f(x) = |x|\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ jest określona dla $\frac{x}{x-2} \geqslant 0$.

Rozwiązując nierówność $\frac{x}{x-2} \geqslant 0$, zauważamy, że jest ona równoważna nierówności $x(x-2) \geqslant 0$ i $x \neq 2$.

Rozwiązaniem nierówności $x(x-2) \geqslant 0$ przy założeniu, że $x \neq 2$, jest $x \in (-\infty, 0\rangle \cup (2, \infty)$.

Rozwiązanie tej nierówności możemy odczytać z wykresu funkcji $y = x(x-2)$:



Dziedziną funkcji $f(x) = |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ jest zbiór $D_f = (-\infty, 0\rangle \cup (2, \infty)$.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej oraz uwzględniając dziedziną funkcji f, możemy możemy zapisać:

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \begin{cases} x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{dla } x \in (2,\ \infty) \\ -x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{dla } x \in (-\infty, 0\rangle \end{cases}.$$

Policzymy teraz granice na krańcach przedziałów wyznaczonych w dziedzinie.

$$\lim_{x \to -\infty} |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \left[2 \cdot \sqrt{\frac{2}{0^+}}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right)=\infty$$

Na podstawie wyliczonych granic możemy stwierdzić, że wykres funkcji ma asymptotę pionową prawostronną $x=2$ i nie ma asymptot poziomych, szukamy więc asymptot ukośnych.

Prosta $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji, gdy istnieją granice właściwe

$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ lub $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

Liczymy więc granice:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}|x|\cdot\frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right)=-\sqrt{\frac{1}{1-0}}=-1$$

$a=-1$,

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}\left[|x|\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2}}+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)\right].$$

Przekształćmy to wyrażenie do postaci ułatwiającej wyliczenie granicy:

$$x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=x\cdot\frac{\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=x\cdot\frac{1-\frac{x}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=x\cdot\frac{\frac{x-2}{x-2}-\frac{x}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=$$

$$=x\cdot\frac{\frac{-2}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=\frac{\frac{-2x}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}}=\frac{-2x}{(x-2)\left(1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)}=$$

$$=\frac{-2x}{x(1-\frac{2}{x})\left(1+\sqrt{\frac{x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}\right)}=\frac{-2}{(1-\frac{2}{x})\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right)}.$$

Wróćmy do wyliczenia b:

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2}{(1-\frac{2}{x})\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right)}\right]=\frac{-2}{(1-0)\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-0}}\right)}=$$

$= \frac{-2}{2} = -1.$

Prosta $y = -x - 1$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $f(x)$.

Analogicznie wyznaczamy równanie asymptoty ukośnej prawostronnej:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} |x| \cdot \frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}} \right) = \sqrt{\frac{1}{1-0}} = 1$$

$a = 1$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to +\infty} \left[|x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \right]$$

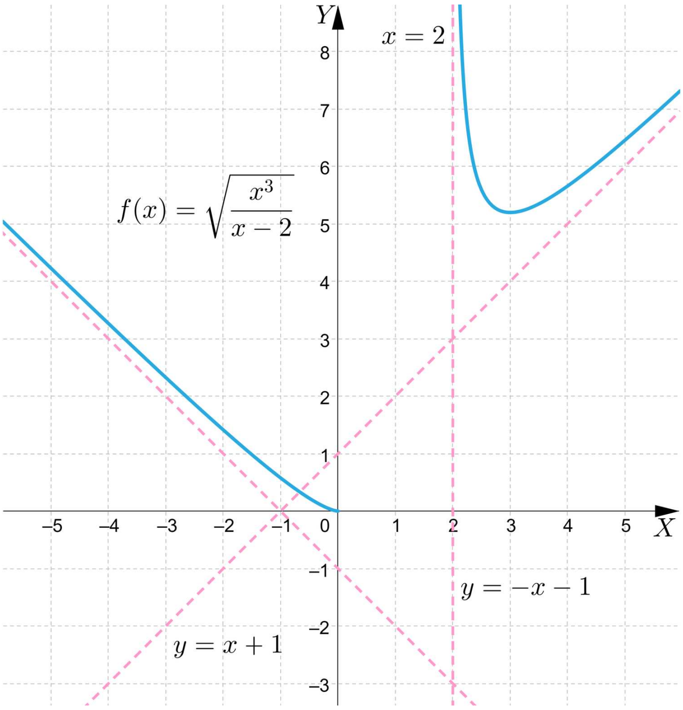
$$x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = x \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1} = x \cdot \frac{\frac{x}{x-2} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1} = x \cdot \frac{\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x-2}}{\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1} =$$

$$= \frac{2x}{(x-2)\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1 \right)} = \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}} + 1 \right)}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}} \right)} \right] =$$

$$= \frac{2}{(1-0)\left(1 + \sqrt{\frac{1}{1-0}} \right)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $f(x)$.



Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ są proste:

- $x = 2$ pionowa prawostronna,
- $y = -x - 1$ ukośna lewostronna,
- $y = x + 1$ ukośna prawostronna.

Pamiętajmy, że nie każda funkcja ma asymptoty.

Przykład 4

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$. Wówczas $D_f = \mathbb{R}$, więc funkcja nie ma asymptot pionowych.

Obliczmy granice na krańcach dziedziny: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + 5x^2 - 3x + 2\right) = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + 5x^2 - 3x + 2\right) = -\infty$, więc funkcja nie ma asymptot poziomych.

Sprawdźmy, czy funkcja ma asymptoty ukośne. Policzmy granice:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2-3x+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + 5x - 3 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$ oraz

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2-3x+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + 5x - 3 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$, więc funkcja nie ma asymptot ukośnych.

Słownik

wartość bezwzględna liczby a

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się teraz z filmem prezentującym wyznaczanie równań asymptot wykresu funkcji a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D8zPs92OX

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania równań asymptot.

Polecenie 2

Podaj równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

Polecenie 3

Podaj równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = 3x\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$. Asymptotami wykresu tej funkcji są proste:

- [ ] $y = 2$
- [ ] $x = 2$
- [ ] $y = \frac{5}{3}$
- [ ] $x = -3$

Ćwiczenie 2

Do wzoru funkcji dobierz równania asymptot jej wykresu.

$h(x) = \frac{5x-3}{x-2}$	$y = -5,\ x = -2$
$f(x) = \frac{5x-3}{x+2}$	$y = 5,\ x = 2$
$g(x) = \frac{5x-3}{2-x}$	$y = -5,\ x = 2$
$k(x) = \frac{3-5x}{x+2}$	$y = 5,\ x = -2$

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{6x^2-7}{2x^2+x-1}$. Asymptotami wykresu tej funkcji są proste o równaniach:

- $y = 3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$
- Wykres funkcji f nie ma asymptot.
- $y = 3$, $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$
- $y = 3$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4

W wyznaczone miejsca wpisz odpowiednie liczby całkowite.

1) Prosta o równaniu $x =$ ______ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-2x^2}{x^2-x-2}$.
2) Prosta o równaniu $x =$ ______ jest również asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-2x^2}{x^2-x-2}$.
3) Prosta o równaniu $y =$ ______ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-2x^2}{x^2-x-2}$.

Ćwiczenie 5

Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{9x^2}{3x+1}$. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Asymptotą pionową obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = -\frac{1}{3}$.
- [ ] Asymptotą ukośną obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = 3x$.
- [ ] Asymptotą ukośną obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = 3x - 1$.
- [ ] Asymptotą pionową obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = -3$.

Ćwiczenie 6

Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{x^2-10x+25}{2x+4}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
Asymptotą ukośną obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o współczynniku kierunkowym $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.	○	○
Asymptotą ukośną obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o współczynniku $b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = -6$.	○	○
Prosta o równaniu $x = 5$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu tej funkcji.	○	○

Ćwiczenie 7

Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \sqrt{25x^2 - 8}$. Wybierz zdanie prawdziwe.

- ◯ Proste o równaniach $y = -5x$ oraz $y = 5x$ są asymptotami ukośnymi wykresu tej funkcji.
- ◯ Wykres funkcji f nie ma asymptoty ukośnej.
- ◯ Prosta o równaniu $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu tej funkcji.
- ◯ Prosta o równaniu $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ jest asymptotą pionową wykresu tej funkcji.

Ćwiczenie 8

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe. Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+3} - \sqrt{9x^2+1}}{x}$. Wykres funkcji f:

- ☐ ma asymptotę poziomą o równaniu $y = 0$.
- ☐ ma asymptotę pionową o równaniu $x = 0$.
- ☐ ma asymptotę ukośną o równaniu $y = 3x$.
- ☐ nie ma asymptoty ukośnej.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć równanie asymptoty?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna definicje asymptot wykresu funkcji;
- zna twierdzenia umożliwiające wyliczenie równań asymptot wykresu funkcji;
- podaje równania asymptot wykresu funkcji;
- oblicza granice funkcji w nieskończoności i w punkcie, korzystając z poznanych własności o granicach;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania;
- przedstawia pełny tok rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- konkurs zadaniowy,
- burza mózgów,
- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny,
- e–podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel informuje, że lekcja będzie przeprowadzona metodą konkursu.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel podaje zasady konkursu i rozpoczyna konkurs.
2. Nauczyciel wyłania dwie grupy konkursowe.
3. Nauczyciel rozdaje zestawy zadań drużynom oraz pozostałym uczniom klasy.
4. Zestawy zawierają zadania o różnym poziomie trudności – przy wyborze zadań nauczyciel może skorzystać z przykładów z sekcji „Przeczytaj” i zadań zawartych w filmach samouczkach tematów wymienionych w materiałach pomocniczych.
5. Obie drużyny rozwiązują te same zadania.
6. Uczniowie z drużyn przez 10 minut rozwiązują zadania wg wybranej przez siebie strategii a pozostali uczniowie rozwiązują je w zeszycie.
7. Uczniowie w drużynach współpracują ze sobą przy rozwiązywaniu zadań.
8. Rozwiązując zadania, uczniowie mogą skorzystać z materiałów pomocniczych zawartych w multimedium.
9. Uczniowie z drużyn wybierają nr zadania do rozwiązania przez przeciwników.
10. Wyznaczona przez drużynę osoba rozwiązuje zadanie na tablicy, pozostali z drużyny mu pomagają.
11. Za poprawne rozwiązanie zadania drużyna otrzymuje określoną liczba punktów.
12. Pozostali uczniowie obserwują przebieg konkursu oraz rozwiązują zadania w przypadku, gdy żadna z drużyn go nie rozwiązała.

13. Każda drużyna rozwiązuje ilość zadań określoną przez nauczyciela.
14. Nauczyciel czuwa nad sprawnym przebiegiem konkursu, bierze udział w pracach jury.
15. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Podsumowanie wyników konkursu i wyłonienie zwycięskiej drużyny.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku mogą być wykorzystane do przygotowania konkursu.