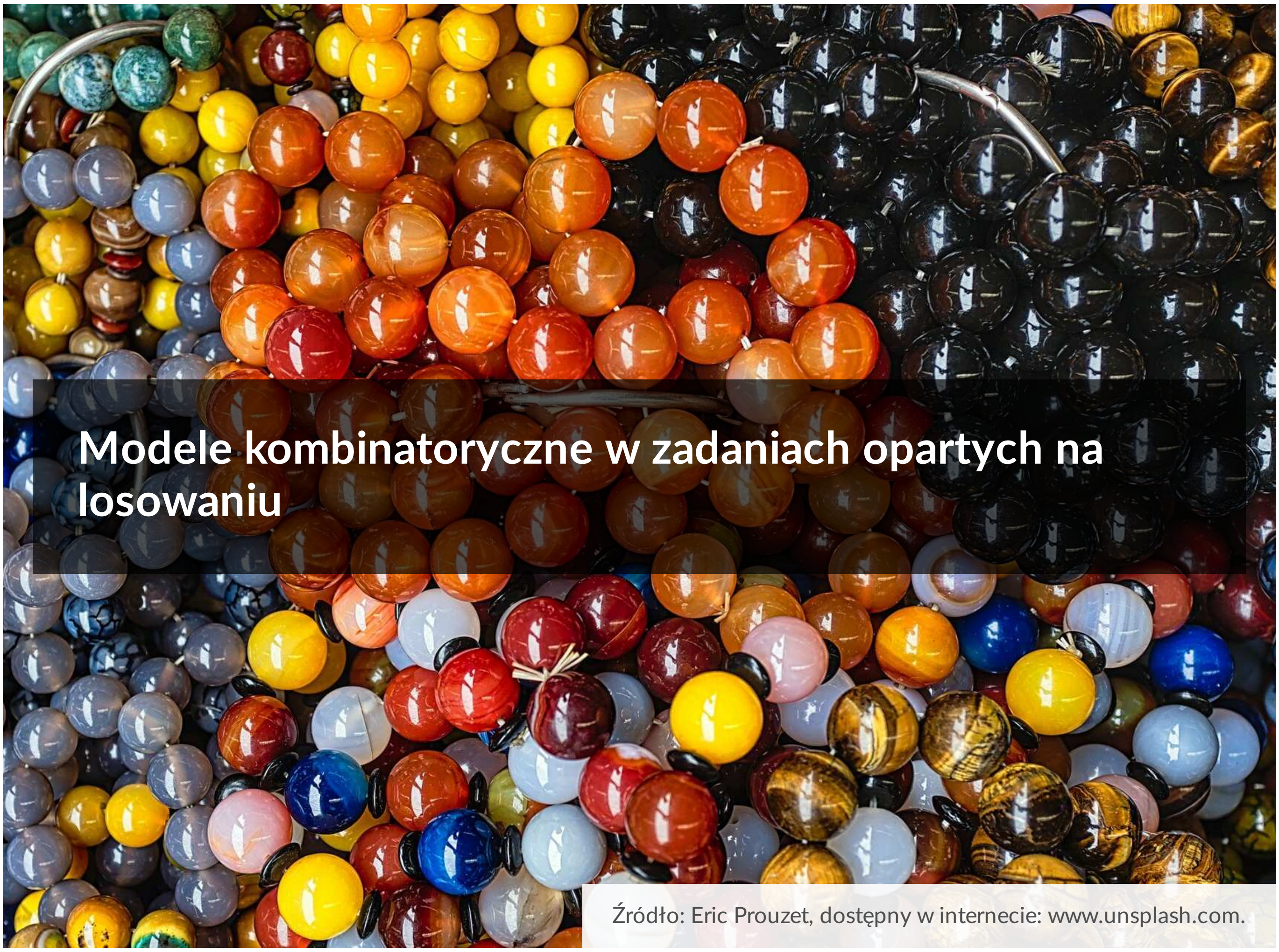
Modele kombinatoryczne w zadaniach opartych na losowaniu

Modele kombinatoryczne w zadaniach opartych na losowaniu



Źródło: Eric Prouzet, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale pokażemy, jak budować modele kombinatoryczne w zadaniach dotyczących wyboru losów przygotowanych na loterię, typowaniu liczb wygrywających w grach losowych typu Lotto, czy też losowania pewnej liczby kul z zestawu umieszczonego w pojemniku. Do zliczania obiektów spełniających ustalone warunki będziemy stosować poznane podstawowe reguły kombinatoryczne.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania polegające na wybieraniu losów z zestawu przygotowanego na loterię,
- Będziesz doskonalić umiejętności dotyczące modelowania matematycznego w doświadczeniu polegającym na typowaniu liczb wygrywających w grze losowej typu Toto-Lotek,
- Znajomość poznanych wcześniej reguł kombinatorycznych pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników w doświadczeniach polegających na losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego kule różniące się kolorami, przy czym kule mogą odróżniać się również numerami.

Przeczytaj

Przegląd zadań dotyczących losowania zaczniemy od zadań odwołujących się do popularnych gier losowych. W kolejnych przykładach pokażemy, jak rozwiązywać zadania dotyczące losowania kul umieszczonych w pojemniku. Warunki, jakie będą miały spełniać wylosowane kule, będą zależały m.in. od kolorów kul, a także – jeśli w pojemniku są ponumerowane kule – od ich numerów.

Przykład 1

a) W pewnej grze losowej typujemy 5 liczb z 29–elementowego zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 29\}$. Sprawdzamy swoje typy po wylosowaniu przez maszynę losującą 5 liczb z tego samego zbioru.
Obliczymy, ile jest w tej grze możliwości trafienia dokładnie 3 liczb.

b) W pewnej loterii jest 50 losów, wśród których: 1 gwarantuje wygraną w wysokości 100 zł, 2 gwarantują wygraną w wysokości 50 zł, 5 gwarantuje wygraną w wysokości 20 zł, 10 gwarantuje wygraną w wysokości 10 zł, a pozostałe losy są puste.
Kupujemy w tej loterii 2 losy. Obliczymy, ile jest możliwości wygrania w ten sposób co najmniej 50 złotych.

Rozwiązanie:

Ad a) Zauważmy, że każdy wynik typowania jest 5–elementową kombinacją 29–elementowego zbioru wszystkich dostępnych numerów.

Jeśli mamy trafić trzy liczby (co jest możliwe na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów), to wraz z nimi musimy wytypować 2 spośród nietrafionych (co jest możliwe na $\binom{24}{2} = 276$ sposobów).

Korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy więc, że wszystkich możliwości trafienia 3 liczb jest $\binom{5}{3} \cdot \binom{24}{2} = 10 \cdot 276 = 2760$.

Uwaga:
Wszystkie wyniki rozpatrywanego typowania możemy podzielić na rozłączne przypadki ze względu na liczbę trafionych liczb. Korzystając z reguły dodawania zapiszemy wtedy następującą równość
$$\binom{29}{5} = \binom{5}{5} \cdot \binom{24}{0} + \binom{5}{4} \cdot \binom{24}{1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{24}{2} +$$

$$+\binom{5}{2}\cdot\binom{24}{3}+\binom{5}{1}\cdot\binom{24}{4}+\binom{5}{0}\cdot\binom{24}{5}.$$

(Jest to szczególny przypadek tzw. **tożsamości Vandermonde'a**)

Ad b) Zauważmy, że każdy wynik opisanego losowania jest 2–elementową kombinacją 50–elementowego zbioru wszystkich dostępnych losów.

Kupując 2 losy wygramy co najmniej 50 zł w jednym z następujących rozłącznych przypadków:

- jeśli wśród zakupionych trafi się los z wygraną 100 zł; wtedy zakupiony z nim dowolny spośród pozostałych losów można dobrać na 49 sposobów, a więc w tym przypadku jest 49 możliwości zakupu,
- jeśli oba zakupione będą z wygraną 50 zł – w tym przypadku jest 1 możliwość zakupu,
- jeśli wśród zakupionych nie będzie losu za 100 zł, natomiast będzie dokładnie jeden z dwóch losów z wygraną 50 zł; wtedy zakupiony z nim dowolny spośród pozostałych losów można dobrać na 47 sposobów, a więc w tym przypadku jest $47\cdot 2=94$ możliwości zakupu.

Podsumowując, otrzymujemy, że wszystkich możliwości jest $49+1+94=144$.

Możemy też zauważyć, że w wyniku zakupu dwóch losów **nie wygramy** co najmniej 50 złotych wtedy i tylko wtedy, gdy wśród obu zakupionych losów nie będzie ani jednego spośród 3 losów gwarantujących najwyższe wygrane (za 100 zł lub za 50 zł). Takich możliwości jest $\binom{47}{2}=1081$.

Ponieważ w omawianej loterii wszystkich możliwości zakupu dwóch losów jest $\binom{50}{2}=1225$, więc wszystkich możliwości zakupu dwóch losów, które gwarantują wygraną co najmniej 50 zł jest $\binom{50}{2}-\binom{47}{2}=1225-1081=144$.

Przykład 2

W pojemniku znajduje się 10 kul: 2 białe, 3 czerwone oraz 5 niebieskich. Losujemy z tego pudełka jednocześnie 3 kule. Obliczymy, ile jest wyników tego losowania, które spełniają warunek:

a) otrzymamy trzy kule tego samego koloru,

b) wśród wylosowanych nie będzie pary kul w tym samym kolorze,

c) co najmniej dwie z wylosowanych kul będą tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Zauważmy na wstępie, że każdy wynik losowania jest 3–elementową kombinacją 10–elementowego zbioru wszystkich kul.

Ad a) Ponieważ w tym samym kolorze możemy wylosować jedynie 3 kule białe (co można zrobić tylko na jeden sposób) lub 3 kule niebieskie (co można zrobić na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów), więc w tym przypadku wszystkich możliwości jest $1 + 10 = 11$.

Ad b) Wśród wylosowanych nie będzie pary kul w tym samym kolorze wtedy i tylko wtedy, gdy wylosujemy po jednej kuli z każdego koloru. Można to zrobić na $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ sposobów.

Ad c) Zauważmy, że 3 kule spośród 10 znajdujących się w pojemniku możemy wylosować na $\binom{10}{3} = 120$ sposobów. Wtedy: albo nie będzie wśród nich pary kul w tym samym kolorze (co – jak obliczyliśmy – jest możliwe w 30 przypadkach), albo co najmniej dwie z wylosowanych kul będą tego samego koloru.

Wobec tego jest $120 - 30 = 90$ takich wyników losowania, że co najmniej dwie z wylosowanych kul będą tego samego koloru.

Przykład 3

W pudełku znajduje się 11 kul ponumerowanych od 1 do 11:

a) Losujemy z tego pudełka jednocześnie 7 kul. Obliczymy, na ile sposobów można to zrobić tak, aby suma numerów wylosowanych kul była parzysta.

b) Losujemy z tego pudełka jednocześnie cztery kule. Obliczymy, na ile sposobów można to zrobić tak, aby iloczyn numerów wylosowanych kul był podzielny przez 10.

c) Wyjmujemy z tego pudełka dwie kule: kulę z numerem 1 oraz kulę z numerem 2 i odkładamy je na bok. Następnie z pozostałych 9 kul losujemy 3 razy po jednej kuli ze zwracaniem (tzn. za każdym razem wylosowaną kulę wrzucamy z powrotem do pudełka). Obliczymy, ile jest takich wyników losowania, które spełniają jednocześnie dwa warunki:
(1) wylosowano dokładnie dwie kule z numerem parzystym,
(2) iloczyn numerów wszystkich wylosowanych kul jest podzielny przez 36.

Rozwiązanie:

Ad a) Zauważmy, że każdy wynik losowania jest 7–elementową kombinacją 11–elementowego zbioru wszystkich kul, wśród których 6 ma numer nieparzysty, a 5 ma numer parzysty.

Wszystkie wyniki rozpatrywanego losowania możemy podzielić na rozłączne przypadki ze względu na liczbę wylosowanych kul z numerem nieparzystym. Warunki zadania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy wśród wylosowanych będzie parzysta liczba kul z numerem nieparzystym.

Korzystając z reguły dodawania otrzymujemy więc, że wszystkich możliwości jest $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{5} + \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{6}{6} \cdot \binom{5}{1} = 15 + 15 \cdot 10 + 5 = 170.$

Ad b) Podzielmy kule na cztery grupy:

- w pierwszej grupie będzie kula z numerem 10,
- w drugiej grupie będzie kula z numerem 5,
- w trzeciej grupie będą 4 kule z numerami: 2, 4, 6, 8,
- w czwartej grupie będzie 5 kul z numerami: 1, 3, 7, 9, 11.

Zauważmy, że wylosujemy parę kul, których numery dadzą iloczyn podzielny przez 10 w dwóch następujących, rozłącznych przypadkach:

- wylosujemy kulę z grupy pierwszej wraz z dowolnymi trzema kulami spośród pozostałych 10 kul; w tym przypadku jest więc $\binom{10}{3} = 120$ możliwości,
- nie wylosujemy kuli z grupy pierwszej, ale wylosujemy kulę z grupy drugiej i wraz z nią co najmniej jedną kulę spośród 4 kul z trzeciej grupy; ponieważ wszystkich możliwości wylosowania 3 kul wybranych z 9 kul z grup trzeciej i czwartej jest $\binom{9}{3} = 84$, a wśród tych przypadków jest $\binom{5}{3} = 10$ takich, kiedy nie wylosujemy żądanej kuli z trzeciej grupy, więc w tym przypadku wszystkich możliwości jest $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 84 - 10 = 74.$

Korzystając z reguły dodawania otrzymujemy więc, że wszystkich możliwości jest $120 + 74 = 194.$

Ad c) Kolejne losowania nazwijmy etapami – ponieważ powtarzamy losowanie 3 razy, więc w opisanym doświadczeniu są 3 etapy.

Podzielmy kule na cztery grupy:

- w pierwszej grupie będzie kula z numerem 6,

- w drugiej grupie będą dwie kule, z numerami 3 oraz 9,
- w trzeciej grupie będą 3 kule z numerami $4, 8, 10$,
- w czwartej grupie będą 3 kule z numerami $5, 7, 11$.

Zauważmy, że wylosujemy parę kul, których numery dadzą iloczyn podzielny przez 36 w trzech następujących, rozłącznych przypadkach:

- w dwóch etapach wylosujemy kulę z grupy pierwszej i dokładnie raz dowolną kulę o numerze nieparzystym, czyli jedną z 5 kul z grupy drugiej lub czwartej; w tym przypadku na 3 sposoby możemy wybrać etap, w którym wylosowana będzie jedna z pięciu kul z numerem nieparzystym, co ogółem daje $3 \cdot 5 = 15$ możliwości,
- dokładnie raz wylosujemy kulę z grupy pierwszej, dokładnie raz wylosujemy inną kulę z numerem parzystym (czyli jedną spośród 3 kul z grupy trzeciej) i dokładnie raz wylosujemy kulę spośród 2 kul z drugiej grupy; ponieważ etapy, w których wylosowane będą kule z tak opisanych 3 grup możemy przydzielić na $3! = 6$ sposobów, więc wszystkich możliwości jest w tym przypadku $3! \cdot 3 \cdot 2 = 36$,
- w dwóch etapach wylosujemy kulę z grupy trzeciej (są tam 3 kule do wyboru) i z grupy drugiej musimy wylosować kulę z numerem 9; w tym przypadku na 3 sposoby możemy wybrać etap, w którym wylosowana będzie kula z numerem 9, co ogółem daje $3^2 \cdot 3 = 27$ możliwości.

Korzystając z reguły dodawania otrzymujemy stąd, że wszystkich możliwości jest $15 + 36 + 27 = 78$.

Przykład 4

W pudełku znajduje się 12 kul: 5 pięć kul białych, ponumerowanych od 1 do 5, cztery kule niebieskie, ponumerowane od 1 do 4 oraz trzy kule czerwone, ponumerowane od 1 do 3.

Obliczymy, na ile sposobów można z tego pojemnika wyjąć jednocześnie trzy kule tak, aby:

a) otrzymać parzysty iloczyn wylosowanych kul,

b) wśród wyjętych była dokładnie jedna kula biała i dokładnie jedna kula z numerem nieparzystym,

c) otrzymać trzy kule o parami różnych numerach.

Rozwiązanie:

Zauważmy na wstępie, że każdy wynik rozpatrywanego losowania jest 3−elementową kombinacją 12−elementowego zbioru wszystkich kul.

Ad a) W pudełku jest 7 kul z numerem nieparzystym i 5 kul z numerem parzystym.

Ponieważ wszystkich możliwości wylosowania 3 kul z pudełka jest $\binom{12}{3} = 220$, z czego na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów otrzymamy wszystkie trzy kule z numerem nieparzystym, więc w każdym z pozostałych $220 - 35 = 185$ przypadków co najmniej jedna z trzech wylosowanych kul będzie miała numer parzysty.

Oznacza to, że jest 185 sposobów otrzymania parzystego iloczynu wylosowanych kul.

Ad b) Podzielmy kule na cztery grupy:

- w pierwszej grupie będą 3 kule białe z numerami nieparzystymi: 1, 3 oraz 5,
- w drugiej grupie będą 2 kule białe z numerami parzystymi: 2 oraz 4,
- w trzeciej grupie będą 4 kule: dwie niebieskie z numerami nieparzystymi 1, 3 oraz dwie czerwone z numerami nieparzystymi 1, 3,
- w czwartej grupie będą 3 pozostałe kule: dwie niebieskie z numerami 2, 4 oraz czerwona z numerem 2.

Zauważmy, że tylko w dwóch następujących, rozłącznych przypadkach wylosujemy trzy kule spełniające warunki zadania:

- wylosujemy jedną kulę z grupy pierwszej, czyli białą z numerem nieparzystym (co można zrobić na 3 sposoby) oraz dwie kule z grupy czwartej (co również można zrobić na 3 sposoby); w tym przypadku mamy więc $3 \cdot 3 = 9$ możliwości,
- wylosujemy jedną kulę z grupy drugiej, czyli białą z numerem parzystym (co można zrobić na 2 sposoby), jedną z grupy trzeciej, czyli nie białą z numerem nieparzystym (co można zrobić na 4 sposoby) oraz jedną kulę z grupy trzeciej (co można zrobić na 3 sposoby); w tym przypadku jest więc $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ wszystkich możliwości.

W takim razie ogółem mamy $9 + 24 = 33$ sposoby otrzymania trzech kul, wśród których będzie dokładnie jedna kula biała i dokładnie jedna kula z numerem nieparzystym.

Ad c) Podzielmy kule na pięć grup, ze względu na zapisane na nich numery:

- w pierwszej grupie będą 3 kule z numerem 1,
- w drugiej grupie będą 3 kule z numerem 2,
- w trzeciej grupie będą 3 kule z numerem 3,

- w czwartej grupie będą 2 kule z numerem 4,
- w piątej grupie będzie 1 kula z numerem 5.

Zauważmy, że losowania spełniające warunki zadania możemy podzielić na cztery rozłączne przypadki:

- wylosujemy po jednej kuli z grup pierwszej, drugiej i trzeciej, co można zrobić na $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ sposobów,
- wylosujemy po jednej kuli z dwóch grup wybranych spośród trzech pierwszych (pierwszej, drugiej i trzeciej) oraz jedną kulę z grupy czwartej, co można zrobić na $\binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ sposoby,
- wylosujemy po jednej kuli z dwóch grup wybranych spośród trzech pierwszych oraz jedną kulę z grupy piątej, co można zrobić na $\binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$ sposobów,
- wylosujemy jedną kulę z grupy wybranej spośród trzech pierwszych grup, jedną kulę z grupy czwartej oraz jedną kulę z grupy piątej, co można zrobić na $\binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ sposobów.

Wynika stąd, że wszystkich możliwości otrzymania trzech kul o różnych numerach jest $27 + 54 + 27 + 18 = 126$.

Słownik

k–elementowa kombinacja zbioru n–elementowego

każdy k–elementowy podzbiór zbioru n–elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k–elementową kombinacją tego zbioru n–elementowego

liczba wszystkich k–elementowych kombinacji zbioru n–elementowego

liczba wszystkich k–elementowych kombinacji zbioru n–elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga

– na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n–tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$$

reguła dodawania

jeżeli zbiory A_1, A_2, $\ldots$, A_n są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów A_1, A_2, $\ldots$, A_n:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Test

Losowanie kul

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na wybieraniu losów z zestawu przygotowanego na loterię,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na typowaniu liczb wygrywających w grze losowej typu Toto–Lotek,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego kule różniące się kolorami,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego ponumerowane kule,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego ponumerowane kule różniące się kolorami,

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

30 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

Polecenie 2

Ułóż po jednym zadaniu dotyczącym doświadczenia polegającego na:

- wybieraniu losów z zestawu przygotowanego na loterię,
- typowaniu liczb wygrywających w grze losowej typu Toto–Lotek,
- losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego kule różniące się kolorami,
- losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego ponumerowane kule,
- losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego ponumerowane kule różniące się kolorami,

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami. Zapisz odpowiedź, podając wynik jako liczbę naturalną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Modele kombinatoryczne w zadaniach opartych na losowaniu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania polegające na wybieraniu losów z zestawu przygotowanego na loterię;
- buduje modele matematyczne doświadczeń polegających na typowaniu liczb wygrywających w grze losowej typu Toto–Lotek;
- oblicza, ile jest wyników w doświadczeniach polegających na losowaniu kilku kul z zestawu zawierającego kule różniące się kolorami, przy czym kule mogą być odróżniać się również numerami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Test samosprawdzający” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Modele kombinatoryczne w zadaniach opartych na losowaniu” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują zadania w teście samosprawdzającym.

Materiały pomocnicze:

Permutacje, kombinacje, wariacje

Wskazówki metodyczne:

Test samosprawdzający można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu zagadnień dotyczących modeli kombinatorycznych w zadaniach opartych na losowaniu.