



Zadania prowadzące do wykorzystania wzorów Viete'a

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania prowadzące do wykorzystania wzorów Viete'a

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się wykorzystaniem wzorów Viete'a do przekształcania wyrażeń arytmetycznych i algebraicznych oraz określania współczynników równania spełniających podane warunki. Będziemy również wybierać wszystkie równania równoważne, spełniające określone zależności.

Twoje cele

- Obliczysz sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne tak, aby można było wykorzystać wzory Viete'a.
- Obliczysz współczynniki równania kwadratowego przy podanych warunkach.

Przeczytaj

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to możemy obliczyć ich sumę i iloczyn, bez konieczności obliczania samych pierwiastków. Pomocne w tym wzory noszą nazwę wzorów Viete'a.

Twierdzenie: Wzory Viete'a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dzięki tym wzorom możemy, bez obliczenia rozwiązań równania obliczyć kwadrat różnicy, sumę kwadratów, czy sumę odwrotności pierwiastków. Do przekształceń będziemy wykorzystywać również wzory skróconego mnożenia.

Na przykład, aby obliczyć wartość bezwzględną różnicy pierwiastków skorzystamy z następującego przekształcenia.

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Przykład 1

Wyznamy współczynniki b i c równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, jeżeli wiadomo, że rozwiązania tego równania x_1, x_2 ($x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$) spełniają warunki $x_1 + x_2 = -6$ i $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4}$.

Najpierw zajmiemy się przekształceniem wyrażenia algebraicznego $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ tak, abyśmy mogli wykorzystać wzory Viete'a.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2}$$

Czyli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{-6}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{3}{4}$$

$$-3x_1 \cdot x_2 = -24$$

$$x_1 \cdot x_2 = 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \implies c = 8$$

$$x_1 + x_2 = -b \implies b = 6$$

Współczynniki równania kwadratowego są równe: $b = 6$, $c = 8$. Zauważmy, że dla wyznaczonych liczb, wyróżnik równania jest dodatni, zatem spełniony jest warunek posiadania przez równanie kwadratowe dwóch różnych pierwiastków.

Wyznaczone liczby są zatem współczynnikami liczbowymi rozpatrywanego równania.

Przykład 2

Wiedząc, że x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - 3x + 1 = 0$ obliczymy wartość wyrażenia $|x_1 - x_2|$.

Najpierw sprawdzimy, czy istotnie równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5 > 0$$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

$$\text{Czyli } |x_1 - x_2| = \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Wartość wyrażenia jest równa $\sqrt{5}$.

Przykład 3

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania kwadratowego. Wykażemy, że

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot (x_1 + x_2) \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\begin{aligned} L = x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot (x_1 + x_2) \cdot x_1 \cdot x_2 = P \end{aligned}$$

$$L = P$$

Przykład 4

Obliczymy, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania jednakowych znaków.

Aby równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ miało dwa różne rozwiązania jednakowych znaków muszą być spełnione następujące warunki:

$$\begin{cases} 1. \Delta > 0 \\ 2. x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$1. \Delta = m^2 - 4 \cdot 4 = m^2 - 16$$

$$m^2 - 16 > 0$$

$$(m - 4)(m + 4) > 0$$

$$m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$$

$$2. x_1 \cdot x_2 = 4 > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R}$$

Zatem aby równanie miało dwa różne rozwiązania jednakowych znaków

$$m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty).$$

Przykład 5

Obliczymy, dla jakich wartości parametru k suma kwadratów różnych pierwiastków x_1 i x_2 równania $x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$ jest równa $6k - 3\frac{1}{2}$.

Z treści zadania wynika, że muszą być spełnione warunki:

$$\Delta > 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 6k - 3\frac{1}{2}$$

$$\Delta = (k + 1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = k^2 + 2k + 1 - 1 = k^2 + 2k$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k > 0$$

$$k(k + 2) > 0$$

$$k \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$$

$$[-(k + 1)]^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} = k^2 + 2k + 1 - \frac{1}{2} = k^2 + 2k + \frac{1}{2}$$

Otrzymujemy równanie:

$$k^2 + 2k + \frac{1}{2} = 6k - 3\frac{1}{2}$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k - 2)^2 = 0$$

$$k = 2$$

Parametr $k = 2 \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, zatem spełnia warunki zadania.

Słownik

wzory Viete'a

jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

wyrażenie algebraiczne

wyrażenie złożone z jednego lub więcej symboli algebraicznych połączonych znakami działań

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, który przedstawia sposoby rozwiązywania zadań prowadzących do wykorzystania wzorów Viete'a.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DiaPslZ1p>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzorów Viete'a.

Polecenie 2

Wyznacz wszystkie liczby całkowite c , dla których równanie $x^2 + 4x + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $c \in \{1, 2\}$

☐ $c \in \{1, 2, 3\}$

☐ $c = 1$

☐ $c \in \{0, 1\}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz sumę odwrotności rozwiązań x_1, x_2 , ($x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$) równania kwadratowego $2x^2 - 5x - 1 = 0$. Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 2



Dane jest równanie kwadratowe $x^2 + bx + c = 0$, które ma dwa rozwiązania $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$, spełniające warunki $x_1 + x_2 = -1$ i $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Współczynniki b i c równania są równe $b = 1$ i $c = 6$.

☐ Współczynniki b i c równania są równe $b = 1$ i $c = -6$.

☐ Równanie posiada jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty.

☐ Równanie posiada dwa ujemne rozwiązania.

☐ Iloczyn rozwiązań równania jest równy (-6) .

☐ Współczynniki b i c równania kwadratowego są liczbami dodatnimi.

Ćwiczenie 3



Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Równania kwadratowe, które mają dwa takie pierwiastki, że ich iloczyn jest równy 5, a suma odwrotności tych pierwiastków jest równa $1\frac{1}{5}$ to:

☐ $(x - 1)(x - 5) = 0$

☐ $-2 \cdot (x - 1)(x - 5) = 0$

☐ $3x^2 - 18x - 15 = 0$

☐ $2x^2 - 12x + 10 = 0$

☐ $(x + 1)(x - 5) = 0$

☐ $x^2 - 6x + 5 = 0$

☐ $(x - 1)(2x - 10) = 0$

☐ $x^2 + 6x + 5 = 0$

Ćwiczenie 4



Oblicz wartość $|x_1 - x_2|$, jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - \sqrt{5}x - 5 = 0$.

Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$|x_1 - x_2| =$

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeżeli liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego to:

☐ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$

☐ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$

☐ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$

☐ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Aby równanie kwadratowe $x^2 - mx + m = 0$ miało dwa różne rozwiązania jednakowych znaków musi zachodzić warunek:

☐ $m \in (-\infty, 0)$

☐ $m \in (4, +\infty)$

☐ $m \in \langle 4, +\infty)$

☐ $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków x_1 i x_2 równania kwadratowego $x^2 + kx - 1 = 0$ jest równa 6? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ dla $k \in \mathbb{R}$

☐ tylko dla $k = 2$

☐ tylko dla $k = -2$

☐ dla $k \in \{-2, 2\}$

Ćwiczenie 8



Wiedząc że x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania kwadratowego przekształć równoważnie równanie $|x_1| + |x_2| = 1$, aby można było skorzystać ze wzorów Viète'a.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania prowadzące do wykorzystania wzorów Viete'a

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) stosuje wzory Viete'a dla równań kwadratowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego
- przekształca równanie kwadratowe tak, aby można było wykorzystać wzory Viete'a
- oblicza współczynniki równania kwadratowego przy podanych warunkach
- dobiera odpowiedni model algebraiczny do rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wzory Viete'a oraz warunki, jakie muszą spełniać pierwiastki równania, aby posiadały określoną własność.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów prostych równań kwadratowych typu $ax^2 + bx + c = 0$. Uczniowie obliczają sumę i iloczyn pierwiastków.
2. Następnie starają się podzielić równania na grupy, według znaków iloczynu i sumy pierwiastków.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały.
4. Przykłady rozwiązań równań znajdujące się w części Przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
5. Uczniowie oglądają film samouczek i omawiają go wraz z nauczycielem.
6. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stolik zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje stopień bardzo dobry.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobu określania liczby rozwiązań równania kwadratowego i przekształcania wyrażeń algebraicznych, związanych ze wzorami Viete'a.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany jako materiał powtórzeniowy przed pracą klasową.