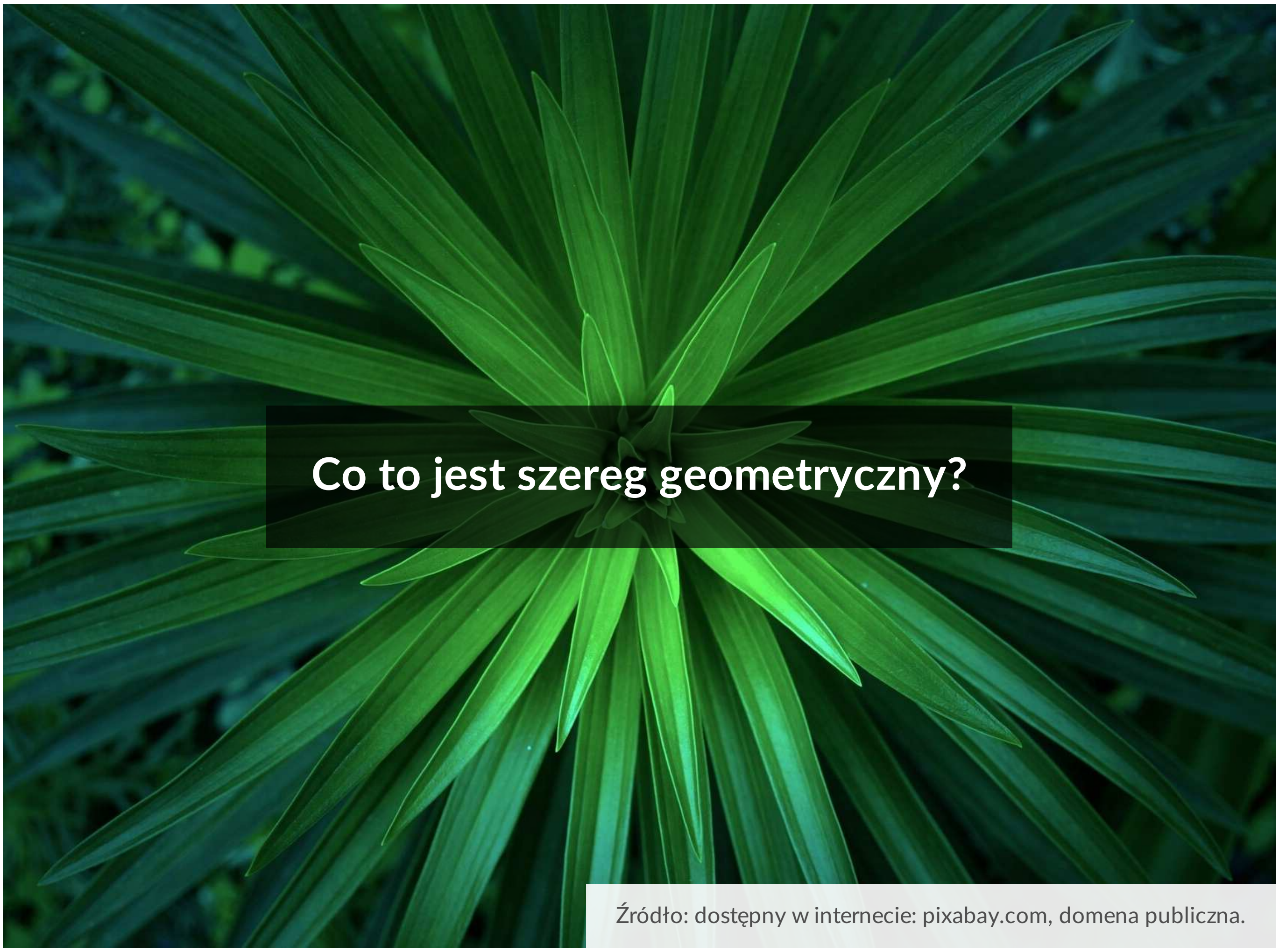
Co to jest szereg geometryczny?



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale poznamy definicję szeregu geometrycznego. Jest to niezwykle ważny typ szeregu, który ma liczne zastosowania, które zaprezentujemy na kilku lekcjach. Na tej lekcji poznamy twierdzenie przedstawiające warunki, dla jakich szereg geometryczny jest zbieżny oraz jaka jest jego suma.

Twoje cele

- Nauczysz się rozpoznawać szeregi geometryczne.
- Nauczysz się rozpoznawać szeregi geometryczne zbieżne i rozbieżne.
- Nauczysz się obliczać sumy zbieżnych szeregów geometrycznych.

Przeczytaj

W tym materiale zajmiemy się szczególnie ważnym typem szeregu, czyli szeregiem geometrycznym.

Najpierw wprowadźmy definicję.

Definicja: szeregu geometrycznego

Szeregiem geometrycznym nazywamy szereg postaci: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie $a_1, q \in \mathbb{R}$. Liczbę q nazywamy ilorazem szeregu geometrycznego.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy szereg $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym.

Rozwiązanie

Aby szereg był geometryczny, sprawdzamy czy kolejne składniki sumy są wyrazami ciągu geometrycznego. Powinny zatem zachodzić równości:

$$\frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \ldots$$

Obliczamy

$$\frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

Ponieważ kolejne składniki szeregu nie są wyrazami ciągu geometrycznego, zatem nie jest to szereg geometryczny.

Zbadamy, dla jakich wartości a_1 i q szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny.

Ciąg sum częściowych szeregu geometrycznego ma postać:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_1 q \\
&S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}
\end{aligned}$$

Możemy wykorzystać poznany wcześniej wzór na sumę n początkowych wyrazów ciąg geometrycznego

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1 \\ na_1, & \text{gdy } q = 1 \end{cases}$$

Sformułujemy twierdzenie opisujące, dla jakich wartości a_1 oraz q szereg geometryczny jest zbieżny.

Przypadek I

Zauważmy, że szczególnym przypadkiem jest $a_1 = 0$. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu sum częściowych są równe 0, czyli szereg jest zbieżny do 0.

Przypadek II

Niech $a_1 \neq 0$.

1. Niech $q = 1$. Wtedy $S_n = na_1$ i widzimy, że: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } a_1 > 0 \\ -\infty, & \text{gdy } a_1 < 0 \end{cases}$.

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest rozbieżny.

2. Gdy $q = -1$, wtedy $S_n = a_1$ dla nieparzystych liczb naturalnych n, a $S_n = 0$ dla dodatnich parzystych liczb naturalnych n. Zatem nie istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$jest rozbieżny.
3. Jeżeli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right) = +\infty, \text{ gdy } a_1 > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right) = -\infty, \text{ gdy } a_1 < 0.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest rozbieżny.

4. Jeżeli $q < -1$, to ciąg (q^n) jest rozbieżny, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest rozbieżny.
5. Jeżeli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ i wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Możemy sformułować zatem twierdzenie.

> **Twierdzenie: o zbieżności szeregu geometrycznego**
>
> Jeżeli $|q| < 1$ lub $a_1 = 0$, to szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny.
>
> Jeżeli $a_1 = 0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$.
>
> Jeżeli $|q| < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Przykład 2

Dany jest szereg geometryczny: $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \ldots$ Zbadamy, czy podany szereg jest zbieżny. Jeżeli jest zbieżny, podamy jego sumę.

Rozwiązanie

Zbadamy jaki jest iloraz podanego szeregu:

$q = \frac{-\frac{2}{3}}{1} = -\frac{2}{3}$

Zatem $|q| = \frac{2}{3} < 1$

Zatem szereg jest zbieżny i jego suma jest równa: $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \ldots = \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$.

Przykład 3

Dany jest szereg geometryczny: $x + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \ldots$.

Zbadamy, dla jakich wartości x podany szereg jest zbieżny. W przypadku, gdy szereg jest zbieżny wyznaczymy jego sumę.

Rozwiązanie

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$ lub $|q| < 1$.

Ponieważ w analizowanym szeregu $a_1 = x$ i $q = \frac{1}{x+1}$, zatem, aby szereg był zbieżny, musi zajść jeden z dwóch warunków:

$x = 0$ lub $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$.

Rozwiązujemy nierówność: $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$.

Wówczas $1 < |x+1|$

$x + 1 > 1$ lub $x + 1 < -1$

$x > 0$ lub $x < -2$

Jeżeli $x = 0$, to $x + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \ldots = 0$.

Jeżeli $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, to $x + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \ldots = \frac{x}{1-\frac{1}{x+1}} = x + 1$.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny gdy $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 0, +\infty)$.

Przykład 4

Dany jest szereg geometryczny:
$1 + \left(x^2 + 3x + 1\right) + \left(x^2 + 3x + 1\right)^2 + \left(x^2 + 3x + 1\right)^3 \ldots$.

Zbadamy, dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny. W przypadku, gdy szereg jest zbieżny wyznaczymy jego sumę.

Rozwiązanie

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$ lub $|q| < 1$.

Ponieważ $a_1 = 1$, zatem rozwiążemy tylko warunek: $\left|x^2 + 3x + 1\right| < 1$.

Zatem $x^2 + 3x + 1 < 1$ i
$-1 < x^2 + 3x + 1$.

Rozwiązujemy nierówność: $x^2 + 3x + 1 > -1$
$x^2 + 3x + 2 > 0$

$\Delta = 1$

$x_1 = -1$ lub $x_2 = -2$

Rozwiązaniem nierówności $x^2 + 3x + 1 > -1$ jest zbiór $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

Rozwiązujemy nierówność: $1 > x^2 + 3x + 1$.
$0 > x^2 + 3x$
$0 > x(x + 3)$
$x_3 = 0$ lub $x_4 = -3$

Rozwiązaniem nierówności $1 < x^2 + 3x + 1$ jest zbiór $(-3, 0)$.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny dla $x \in (-3, -2) \cup (-1, 0)$. Suma szeregu jest równa $\frac{1}{-x^2-3x}$.

Słownik

szereg zbieżny

szereg, dla którego ciąg sum częściowych jest zbieżny do granicy liczbowej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją. Następnie wykonaj polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DQlqfR1wg

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący sumy szeregu geometrycznego zbieżnego.

Polecenie 2

Achilles i żółw jednocześnie rozpoczynają bieg w kierunku mety. Achilles jest trzykrotnie szybszy od żółwia, ale w chwili startu znajduje się trzykrotnie dalej od mety, niż żółw. Kto pierwszy będzie na mecie, Achilles czy żółw? Rozwiąż zadanie wykorzystując analogiczną metodę jak w filmie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości x szereg geometryczny $2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{9} + \ldots$ jest zbieżny?

Ćwiczenie 8

Dla jakich wartości x szereg geometryczny $\frac{x}{x-2} + \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-2}\right)^3 + \ldots$ jest zbieżny?

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to jest szereg geometryczny?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- rozpoznaje szeregi geometryczne;
- rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i rozbieżne;
- oblicza sumy zbieżnych szeregów geometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- giełda pomysłów;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Co to jest szereg geometryczny?” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Zapoznaj się uważnie z animacją. Następnie wykonaj polecenie 2.”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze

Pojęcie ciągu

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Co to jest szereg geometryczny?”.