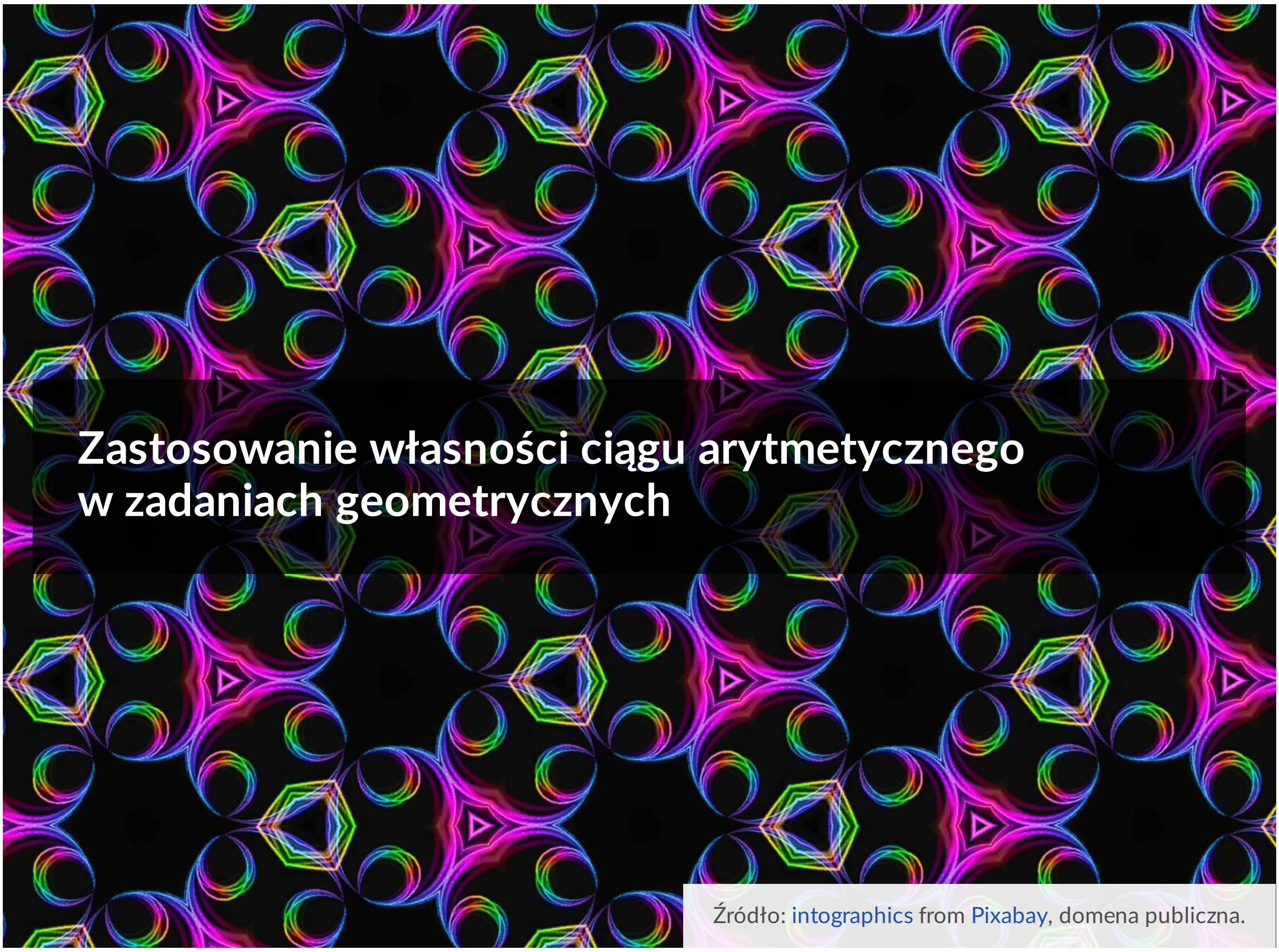
Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach geometrycznych



Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach geometrycznych

Źródło: intographics from Pixabay, domena publiczna.

Johann Wolfgang von Goethe, niemiecki poeta przełomu XVIII i XIX wieku, jeden z najbardziej znaczących w skali światowej dramaturg, twierdził, że

> matematycy to gatunek Francuzów: mówisz coś do nich, a oni przekładają to na swój język i proszę: robi się z tego coś zupełnie innego.

Cytat z pl.wikiquote.org/wiki/Matematyk

Johann Wolfgang von Goethe

Źródło: dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

My pokażemy, że Goethe niekoniecznie miał rację – można tak połączyć pojęcia matematyczne (w naszym przypadku geometryczne i związane z ciągiem arytmetycznym), aby rozwiązywane problemy stawały się proste i zrozumiałe. Korelacja wiadomości o figurach geometrycznych z wiadomościami z algebry, stworzy okazję do rozwinięcia i utrwalenia wiadomości o ciągu arytmetycznym.

Twoje cele

- Powtórzysz i rozwiniesz umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych.
- Zastosujesz w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym.
- Zbudujesz model matematyczny problemu geometrycznego, oparty o własności ciągu arytmetycznego.

Przeczytaj

Już w starożytności poszukiwano trójkątów, których długości boków wyrażone są kolejnymi liczbami naturalnymi (czyli liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1). Najbardziej znanym z nich jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5.

W tym materiale będziemy rozważać nie tylko trójkąty prostokątne, ale również inne wielokąty, których elementy (np. miary kątów) tworzą ciąg arytmetyczny.

Na początek przypomnienie najważniejszych wzorów dotyczących ciągu arytmetycznego, z których będziemy korzystać.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n), jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

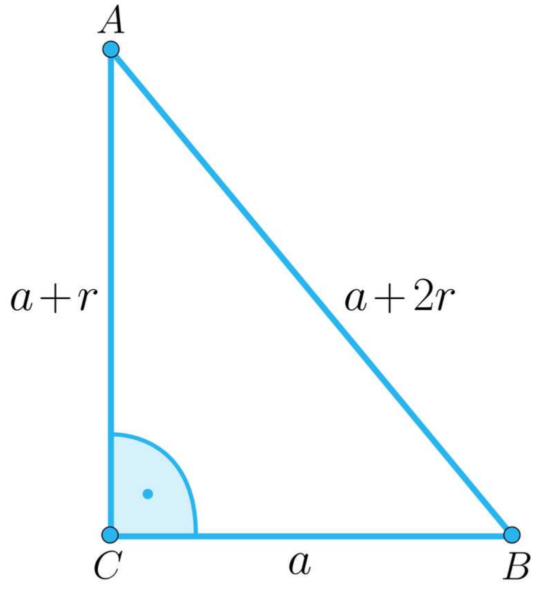
Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	**Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu**	**Suma n początkowych wyrazów ciągu**
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

W początkowych przykładach będziemy łączyć wiadomości o trójkątach z wiadomościami o ciągu arytmetycznym.

Przykład 1

Obliczymy sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego długości boków tworzą ciąg arytmetyczny.



Niech trójkąt ABC będzie rozważanym trójkątem, kąty CAB i CBA niech będą ostre, a kąt CAB – kątem o najmniejszej mierze.

Oznaczmy:
α – miara kąta CAB,
β – miara kąta CBA.

Najmniejszy bok trójkąta, który leży naprzeciw najmniejszego kąta, niech ma długość a, gdzie $a > 0$.

Natomiast różnica ciągu arytmetycznego, który tworzą długości boków trójkąta, niech będzie równa r, gdzie $r > 0$.

Wtedy druga przyprostokątna ma długość $a + r$, natomiast przeciwprostokątna ma długość $a + 2r$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$

Z otrzymanej równości wyznaczamy a.

$a^2 + a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 4ar + 4r^2$

$a^2 - 3ar + ar - 3r^2 = 0$

$a(a - 3r) + r(a - 3r) = 0$

$(a + r)(a - 3r) = 0$

$a = -r$ – sprzeczność, bo $a > 0$

$a = 3r$

Wyznaczamy sinusy katów ostrych trójkąta ABC.

$\sin\beta = \frac{a+r}{a+2r} = \frac{3r+r}{3r+2r} = \frac{4r}{5r} = 0,8$

$\sin\alpha = \frac{a}{a+2r} = \frac{3r}{3r+2r} = \frac{3r}{5r} = 0,6$

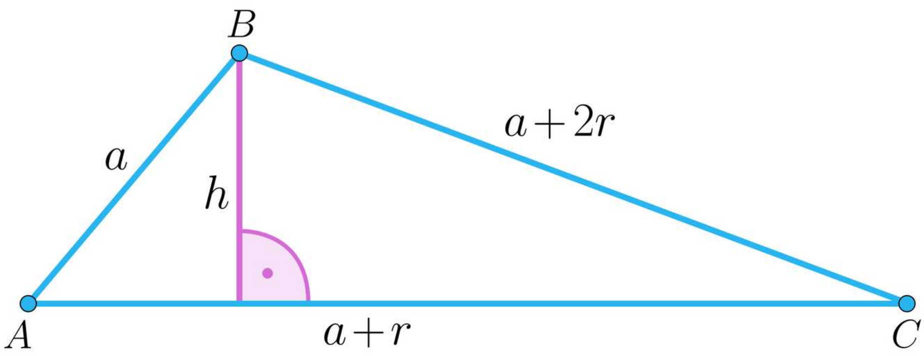
Odpowiedź:

Sinusy kątów ostrych trójkąta są równe odpowiednio $0,8$ i $0,6$.

Przykład 2

Dany jest trójkąt ABC taki, że $|AB| < |AC| < |BC|$.

Wykażemy, że gdy długości boków tego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to promień koła wpisanego w ten trójkąt jest równy trzeciej części wysokości opuszczonej na bok AC.



Oznaczmy:
r – różnica ciągu arytmetycznego,
R – promień koła wpisanego w trójkąt,
$|AB| = a$,
$|AC| = a + r$,
$|BC| = a + 2r$,
h – wysokość trójkąta poprowadzona do boku AC.

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta o bokach danej długości i promieniu koła wpisanego w ten trójkąt oraz ze wzoru na pole trójkąta o danej podstawie i wysokości opuszczonej na tę podstawę.

$P = \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2} \cdot R$

$\frac{1}{2}(a + r) \cdot h = \frac{a+a+r+a+2r}{2} \cdot R$

Przekształcamy zapisaną równość, z której wyznaczamy R.

$\frac{1}{2}(a+r)\cdot h=\frac{a+a+r+a+2r}{2}\cdot R\Big|\cdot 2$

$(a+r)\cdot h=(3a+3r)\cdot R$

$R=\frac{(a+r)\cdot h}{3(a+r)}$

$R=\frac{h}{3}$

Z zapisanej równości wynika, że promień koła wpisanego w trójkąt ABC jest równy trzeciej części wysokości poprowadzonej do boku AC, co należało wykazać.

W kolejnych przykładach powtórzymy niektóre wiadomości o wielokątach i wykorzystamy zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego.

Przykład 3

Miary kątów wielokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 10°. Najmniejszy kąt tego wielokąta ma miarę 100°. Ustalimy, ile boków ma ten wielokąt.

Suma kątów wielokąta o n–bokach jest równa $(n-2)\cdot 180^{\circ}$, a każdy z kątów wielokąta ma miarę mniejszą od 180°.

Z drugiej strony wiemy, że miary kątów wielokąta stanowią wyrazy ciągu arytmetycznego, stąd ich suma jest równa

$\frac{100^{\circ}+100^{\circ}+(n-1)\cdot 10^{\circ}}{2}\cdot n$

Porównujemy otrzymane wyrażenia.

$(n-2)\cdot 180^{\circ}=\frac{100^{\circ}+100^{\circ}+(n-1)\cdot 10^{\circ}}{2}\cdot n$

Sprowadzamy otrzymane równanie do najprostszej postaci.

$(n-2)\cdot 360^{\circ}=(200^{\circ}+10^{\circ}\cdot n-10^{\circ})\cdot n$

$360^{\circ}\cdot n-720^{\circ}=10^{\circ}n^2+190^{\circ}\cdot n$

$n^2-17n+72=0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$\Delta=289-288=1$

$n=\frac{17-1}{2}=8$ lub $n=\frac{17+1}{2}=9$

Dla $n=8$ największy kąt wielokąta ma miarę $100^{\circ}+70^{\circ}=170^{\circ}$.

Dla $n = 9$ największy kąt wielokąta ma miarę $100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ – otrzymujemy sprzeczność (bo miara kąta wielokąta wypukłego jest mniejsza od 180°).

Odpowiedź:

Wielokąt ma 8 boków.

Przykład 4

Długości krawędzi prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2. Wysokość prostopadłościanu jest najdłuższą krawędzią. Pole podstawy prostopadłościanu wynosi 24. Obliczymy pole powierzchni bocznej tego prostopadłościanu.

Oznaczmy:
a, $a + 2$ – długości krawędzi podstawy prostopadłościanu.

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o polu $a(a + 2)$. Zatem

$a(a + 2) = 24$

$a^2 + 2a - 24 = 0$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$\Delta = 4 + 96 = 100$

$a = \frac{-2-10}{2} = -6$ – nie spełnia warunków zadania, bo $a > 0$

$a = \frac{-2+10}{2} = 4$

Obliczamy długości krawędzi prostopadłościanu.

$4 + 2 = 6$

$6 + 2 = 8$

Teraz możemy obliczyć pole powierzchni bocznej prostopadłościanu.

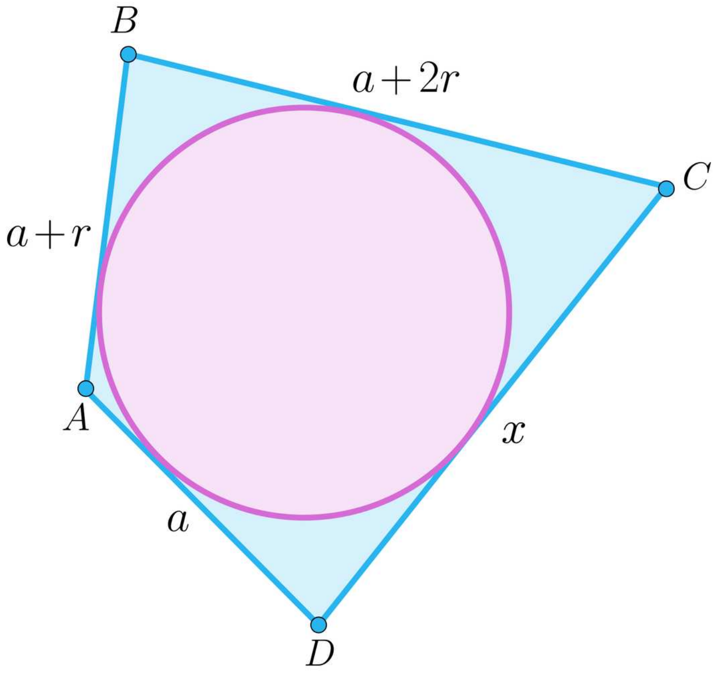
$P = 2 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8 = 160$

Odpowiedź:

Pole powierzchni bocznej prostopadłościanu jest równe 160.

Przykład 5

Czworokąt $ABCD$ opisany jest na okręgu. Długości trzech kolejnych boków czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnimy, że przynajmniej dwa boki tego czworokąta mają tę samą długość.



Oznaczmy:
a – długość najkrótszego boku czworokąta,
r – różnica ciągu, który tworzą długości boków czworokąta,
x – długość boku czworokąta, który nie tworzy z pozostałymi ciągu arytmetycznego.

Czworokąt jest opisany na okręgu, zatem sumy długości przeciwległych boków są równe.

$a + r + x = a + a + 2r$

Zatem

$x = a + r$

Wynika stąd, że $|DC| = |AB|$, czyli dwa boki czworokąta mają tę samą długość.

Zauważmy, że gdy $r = 0$, to wszystkie boki czworokąta są równe.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, starając się najpierw samodzielnie rozwiązać zapisane tam zadanie.

Polecenie 2

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Pole tego trójkąta jest równe 24. Znajdź obwód tego trójkąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Jeśli długość najkrótszego z boków oznaczymy x, to długość tę możemy wyznaczyć, rozwiązując równanie:

- $x^2 - 2x + 3 = 0$
- $x^2 + 2x + 3 = 0$
- $x^2 + 2x - 3 = 0$
- $x^2 - 2x - 3 = 0$

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Długości boków prostokąta i przekątna tego prostokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 6. Obwód prostokąta jest równy 84. Przekątna prostokąta ma długość:

- 24
- 12
- 30
- 18

Ćwiczenie 3

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Promienie kół współśrodkowych tworzą ciąg arytmetyczny. Ciąg arytmetyczny tworzą również:

- [ ] cięciwy tych kół
- [ ] obwody tych kół
- [ ] średnice tych kół
- [ ] pola tych kół

Ćwiczenie 4

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Krótsza z przyprostokątnych ma długość 12. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość 16.
- [ ] Wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość $4,8$.
- [ ] Różnica ciągu, który tworzą długości boków trójkąta jest równa 4.
- [ ] Pole trójkąta jest równe 96.

Ćwiczenie 5

Miary kątów dziewięciokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny, w którym najmniejszy kąt ma miarę 108°. Uzupełnij obliczenia miary największego kąta. Wpisz odpowiednie liczby.

Oznaczmy:

r – różnica ciągu.

Wtedy:

$9 \cdot 108^{\circ} + \boxed{} \cdot r = \boxed{} \cdot 180^{\circ}$

$36r = \boxed{}^{\circ}$

$r = 8^{\circ}$

Miara największego kąta.

$108^{\circ} + 8 \cdot \boxed{}^{\circ} = 172^{\circ}$

Ćwiczenie 6

Łamana składa się z 20 odcinków, których długości tworzą ciąg arytmetyczny. Najkrótszy odcinek ma długość 1, a różnica ciągu jest równa 2. Oblicz długość tej łamanej.
Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie zadania.

$S_{20} = \frac{1+39}{2} \cdot 20$

Oznaczmy:
a – długość najkrótszego boku łamanej,
r – różnica ciągu, który tworzą długości boków łamanej,
(a_n) – rozpatrywany ciąg.

$a_n = a + (n-1) \cdot r$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

Obliczamy sumę dwudziestu kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).

$S_{20} = 20 \cdot 20 = 400$

$a_{20} = 1 + (20-1) \cdot 2 = 1 + 38 = 39$

Do wzoru ogólnego podstawiamy: $n = 20$, $a = 1$, $r = 2$.

Odpowiedź: Długość łamanej jest równa 400.

Wyznaczamy wartość najdłuższego boku łamanej.

Ćwiczenie 7

Czworokąt wpisany jest w koło. Długości trzech kolejnych kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnimy, że przynajmniej dwa kąty tego czworokąta są proste.

Ćwiczenie 8

W trójkącie jeden z kątów ma miarę 120°. Długości boków tego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz stosunki długości boków tego trójkąta.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach geometrycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- powtarza i rozwija umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych
- stosuje w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym
- buduje model matematyczny problemu geometrycznego, opartego o własności ciągu arytmetycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące ciągu arytmetycznego, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami. Wynikiem pracy może być konkluzja, które definicje i twierdzenia dotyczące ciągu arytmetycznego trzeba znać koniecznie (najlepiej na pamięć), a które są ich pochodnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z infografiką. Najpierw próbują samodzielnie rozwiązać podany tam przykład, a następnie porównują z przedstawionym rozwiązaniem. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4 osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji „Sprawdź się”. Grupa rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Końcowym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku

lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Lider każdej grupy omawia sposób rozwiązywania problemów przez uczniów, sposób pełnienia ról w grupie.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest samodzielne przygotowanie mini–prezentacji pokazującej zastosowanie ciągu arytmetycznego w zadaniach praktycznych.

Materiały pomocnicze:

Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać w tematach geometrycznych, dotyczących trójkąta.