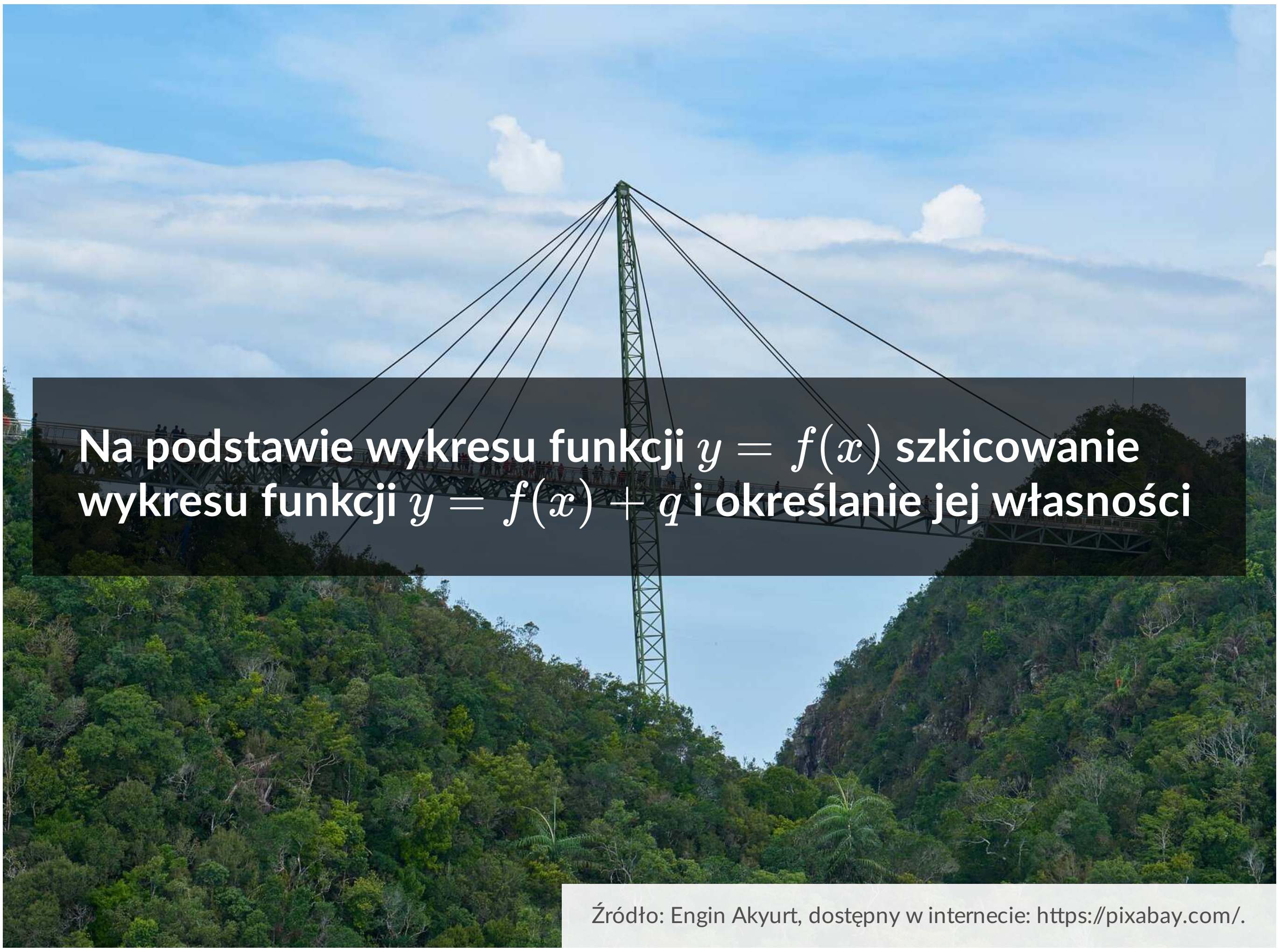
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicowanie wykresu funkcji $y = f(x) + q$ i określanie jej własności

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicowanie wykresu funkcji $y=f(x)+q$ i określanie jej własności

Źródło: Engin Akyurt, dostępny w internecie: https://pixabay.com/.

Wykresy funkcji w układzie współrzędnych możemy dowolnie przekształcać: przesuwać o dowolny wektor, czy odbijać symetrycznie względem wybranego punktu lub wskazanej prostej.

W tym materiale będziemy doskonalić umiejętności związane ze szkicowaniem wykresu funkcji $y=f(x)+q$ oraz $y=f(x)-q$, gdzie $q>0$. Poćwiczymy wyznaczanie własności funkcji, której wykres został przesunięty, mając wykres danej funkcji, bądź znając własności danej funkcji.

Twoje cele

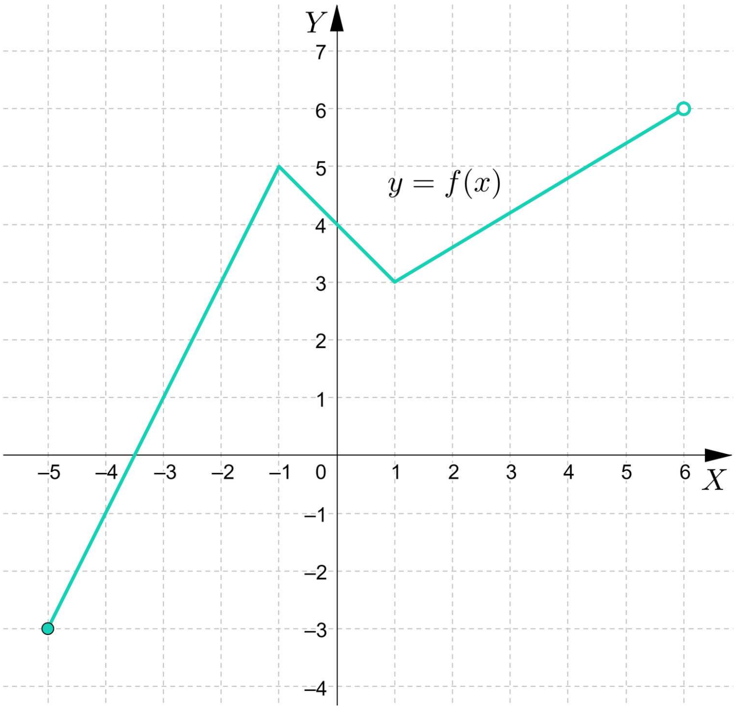
- Przesuniesz odpowiednio wykres funkcji $y=f(x)$, otrzymując prostą, będącą wykresem funkcji $y=f(x)+q$ lub $y=f(x)-q$, gdzie $q>0$.
- Określisz własności funkcji $y=f(x)+q$, $y=f(x)-q$, gdzie $q>0$, znając własności funkcji $y=f(x)$.

Przeczytaj

Załóżmy, że $q > 0$. Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o q jednostek w górę, zaś wykres funkcji $y = f(x) - q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o q jednostek w dół.

Przykład 1

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



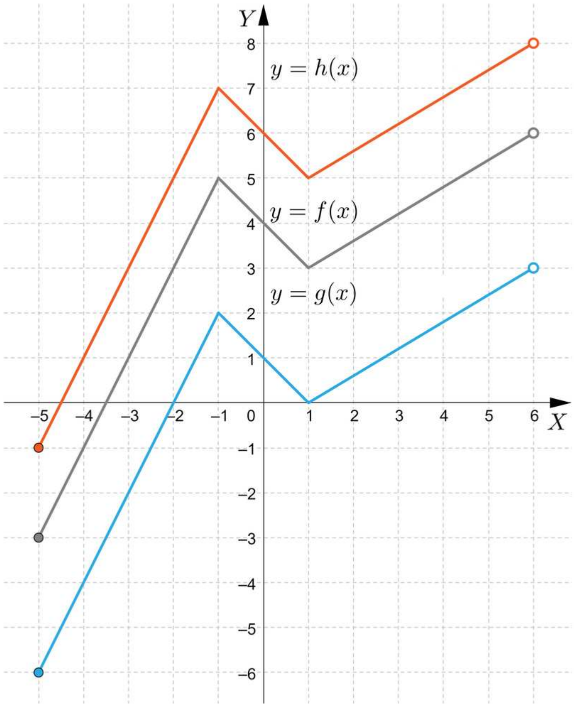
Naszkicujemy wykresy funkcji $g(x) = f(x) - 3$ i $h(x) = f(x) + 2$. Podamy zbiory wartości funkcji f, g i h oraz punkty przecięcia wykresów tych funkcji z osią Y. Przypomnijmy sobie, jakie przekształcenie należy wykonać, aby uzyskać wykresy tych funkcji.

Rozwiązanie

Aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = f(x) - 3$ należy wykres danej funkcji f przesunąć o 3 jednostki w dół, wzdłuż osi Y.

Aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = f(x) + 2$ należy wykres danej funkcji f przesunąć o 2 jednostki w górę wzdłuż osi Y.

Wykonamy te czynności w jednym układzie współrzędnych.



Korzystając z wykresów funkcji odczytamy zbiory wartości oraz współrzędne punktu przecięcia wykresów z osią Y.

$ZW_f = \langle -3, 6)$

$ZW_g = \langle -6, 3)$ – przesunięcie w dół o 3 jednostki

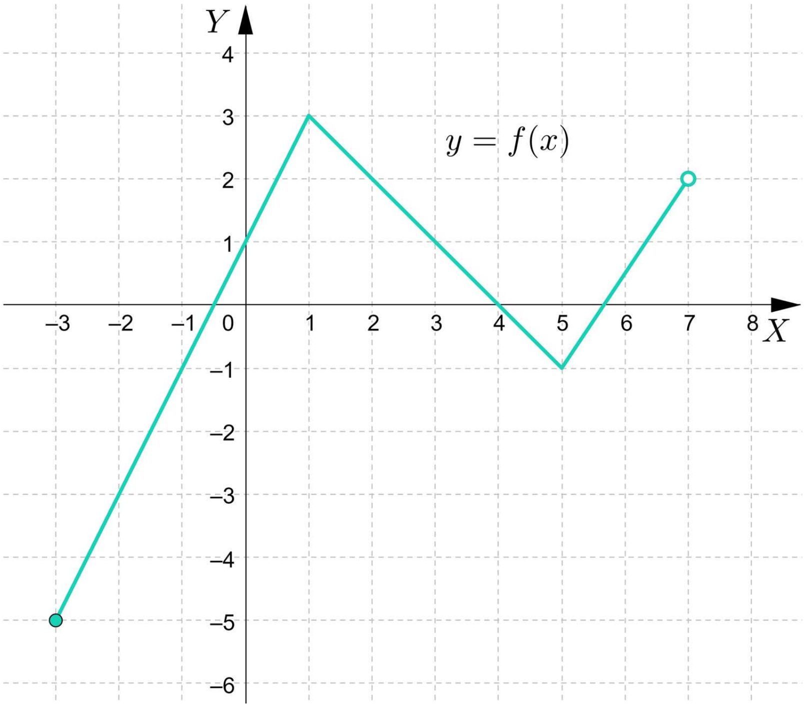
$ZW_h = \langle -1, 8)$ – przesunięcie w górę o 2 jednostki.

Punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Y: $(0,\ 4)$

Punkt przecięcia wykresu funkcji g z osią Y: $(0,\ 1)$

Punkt przecięcia wykresu funkcji h z osią Y: $(0,\ 6)$.

Przykład 2



Na powyższym rysunku dany jest wykres funkcji f. Podamy D_g, ZW_g oraz g_{max}, g_{min}, jeżeli $g(x) = f(x) - 2$.

Rozwiązanie

Chcąc wyznaczyć wszystkie wymienione własności funkcji g bez sporządzania wykresu, wyznaczymy własności funkcji f.

$D_f = \langle -3,\ 7)$

$ZW_{f=}\langle -5,\ 3\rangle$

$f_{max} = 3$

$f_{min} = -5$

Funkcja g powstaje w wyniku przesunięcia w dół wykresu funkcji f o 2 jednostki. Zatem:

$D_g = \langle -3,\ 7)$

$ZW_{g=}\langle -7,\ 1\rangle$

$g_{max} = 1$

$g_{min} = -7$.

Przykład 3

Uzupełnimy tabelę, mając dane informacje na temat funkcji f

Funkcja	Dziedzina	Zbiór wartości	Punkt przecięcia z osią Y

Funkcja	Dziedzina	Zbiór wartości	Punkt przecięcia z osią Y
$f(x)$	$D_f = (-3, 4\rangle$	$ZW_f = \langle -2, 4)$	$(0, -2)$
$g(x) = f(x) + 5$			
$h(x) = f(x) - 3$			

Rozwiązanie

Aby uzupełnić własności funkcji g, rozpoczniemy od interpretacji wzoru:

$g(x) = f(x) + 5$ to przesunięcie w górę o 5 jednostek wykresu funkcji f, zatem:

$D_g = (-3,\ 4\rangle$

$ZW_g = \langle 3,\ 9)$

Punkt przecięcia z osią Y: $(0,\ 3)$

Analogicznie postępujemy z własnościami funkcji h, rozpoczniemy od interpreatcji wzoru:

$h(x) = f(x) - 3$, to przesunięcie w dół o 3 jednostki wykresu funkcji f, zatem:

$D_h = (-3,\ 4\rangle$

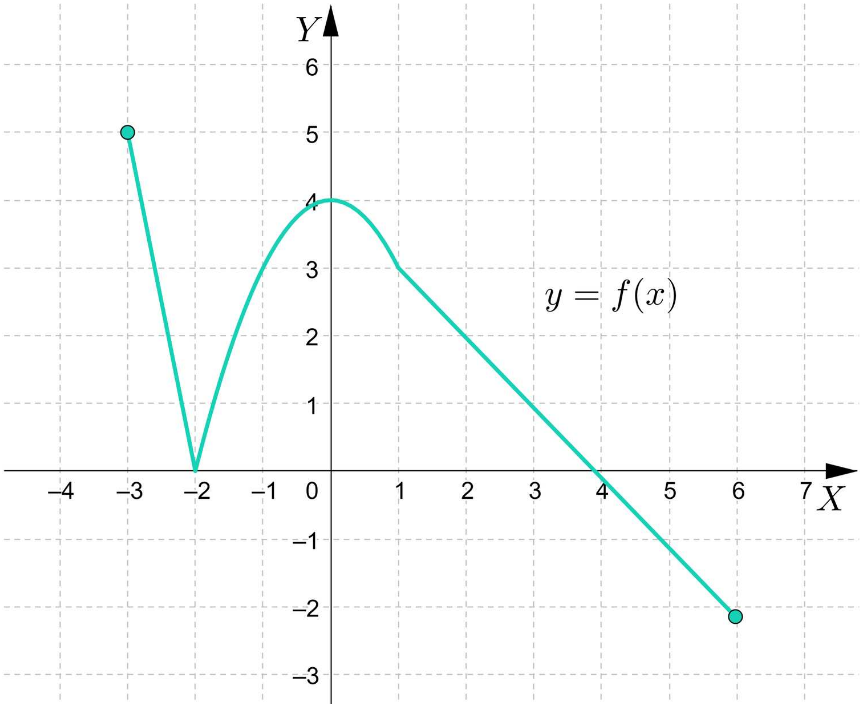
$ZW_h = \langle -5,\ 1)$

Punkt przecięcia z osią Y: $(0, -\ 5)$

Funkcja	Dziedzina	Zbiór wartości	Punkt przecięcia z osią Y
$f(x)$	$D_f = (-3, 4\rangle$	$ZW_f = \langle -2, 4)$	$(0, -2)$
$g(x) = f(x) + 5$	$D_g = (-3, 4\rangle$	$ZW_g = \langle 3, 9)$	$(0, 3)$
$h(x) = f(x) - 3$	$D_h = (-3, 4\rangle$	$ZW_h = \langle -5, 1)$	$(0, -5)$

Przykład 4

Dany jest wykres funkcji f



Wyznaczymy dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą, największą wartość funkcji oraz punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Y dla danej funkcji oraz funkcji:

$g(x) = f(x) + 1$

$h(x) = f(x) - 5$

Rozwiązanie

Rozpoczniemy od wyznaczenia wszystkich własności dla funkcji f, odczytując je z wykresu funkcji:

$D_f = \langle -3,\ 6 \rangle$

$ZW_f = \langle -2,\ 5 \rangle$

$f_{min} = -2$

$f_{max} = 5$

punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Y: $(0,\ 4)$

Wzór funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oznacza, że wykres funkcji f należy przesunąć w górę o 1 jednostkę wzdłuż osi Y, zatem:

$D_g = \langle -3,\ 6 \rangle$ nie ulega zmianie, gdyż to przesunięcie nie ma wpływu na argumenty

$ZW_g = \langle -1,\ 6 \rangle$

$g_{min} = -1$

$g_{max} = 6$

punkt przecięcia wykresu funkcji g z osią Y: $(0,\ 5)$

Wzór funkcji $h(x) = f(x) - 5$ oznacza, że wykres funkcji f należy przesunąć w dół o 5 jednostek wzdłuż osi Y, zatem:

$D_h = \langle -3,\ 6 \rangle$

$ZW_h = \langle -7,\ 0 \rangle$

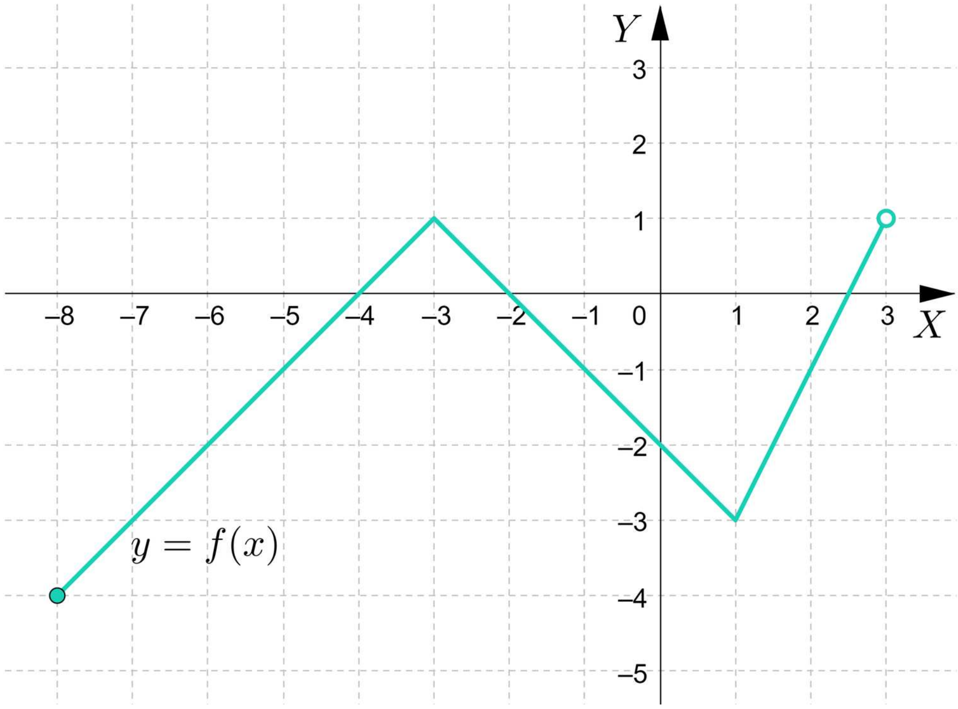
$h_{min} = -7$

$h_{max} = 0$

punkt przecięcia wykresu funkcji h z osią Y: $(0,\ -1)$.

Przykład 5

Dany jest wykres funkcji f



Wyznaczymy argumenty, dla których $f(x) + 1 \geq 0$.

Rozwiązanie

Można to wykonać na dwa sposoby:

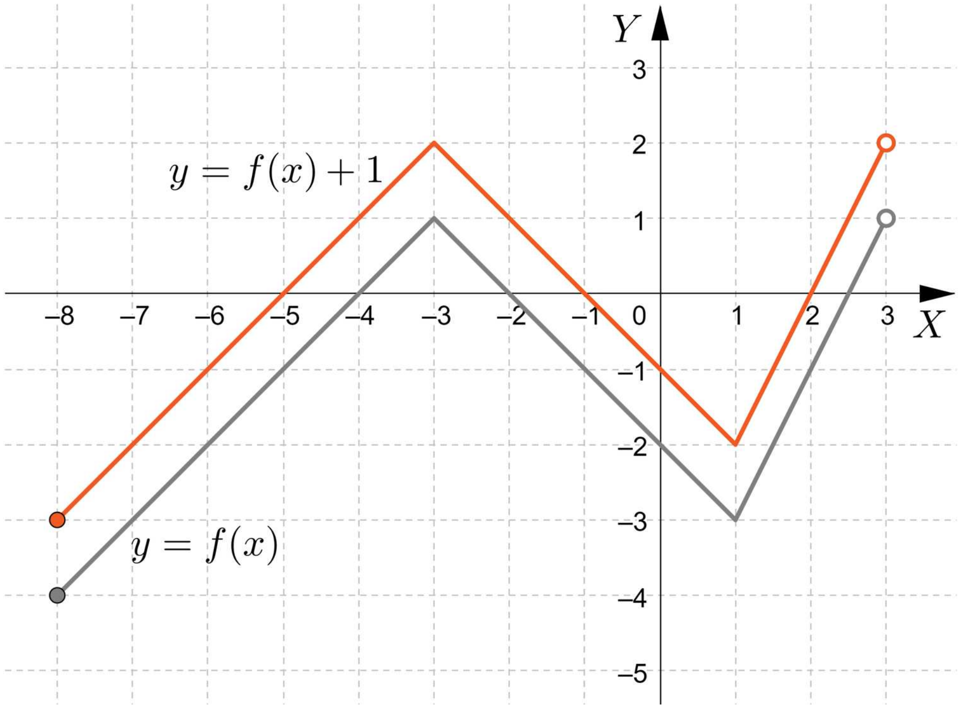
I sposób:

Możemy przekształcić nierówność i rozwiązać nierówność równoważną, tzn. $f(x) \geq -1$

Korzystając z danego wykresu odczytujemy, że $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \in \langle -5, \ -1\rangle \cup \langle 2, \ 3)$

II sposób:

Rozwiążemy nierówność $f(x) + 1 \geq 0$ korzystając z przesunięcia wykresu danej funkcji o 1 jednostkę w górę i odczytamy rozwiązanie.



$f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, \ -1\rangle \cup \langle 2, \ 3)$.

Słownik

przesunięcie w górę

wzór $y = f(x) + q$, gdzie $q > 0$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ w górę o q jednostek wzdłuż osi Y

przesunięcie w dół

wzór $y = f(x) - q$, gdzie $q > 0$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ w dół o q jednostek wzdłuż osi Y

dziedzina funkcji

dziedzina funkcji liczbowej określonej za pomocą wzoru w postaci wyrażenia algebraicznego - zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór tej funkcji (dane wyrażenie algebraiczne) ma sens liczbowy

zbiór wartości funkcji

zbiór wartości funkcji liczbowej - wszystkich tych liczb, które można otrzymać w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Y

punkt, którego odciętą jest 0, zaś rzędną jest wartość funkcji dla argumentu 0, czyli jest to punkt o współrzędnych $(0,\ f(0))$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zobacz w symulacji interaktywnej, jak zmienia się wzór funkcji, gdy przesuniesz dany wykres wzdłuż osi Y (w górę lub w dół), a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D183cpM2E

Polecenie 2

Korzystając z symulacji interaktywnej funkcji liniowej ($f(x) = ax$) sporządź wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$.

Używając suwaka q przesuń wykres o 4 jednostki w górę. Podaj wzór otrzymanej funkcji oraz punkt przecięcia wykresu z osią Y.

Polecenie 3

Korzystając z symulacji interaktywnej funkcji kwadratowej ($f(x) = ax^2$), dokonując odpowiedniego przesunięcia, podaj współrzędne wierzchołka paraboli $f(x) = 3x^2 - 5$ oraz zbiór wartości tej funkcji.

Polecenie 4

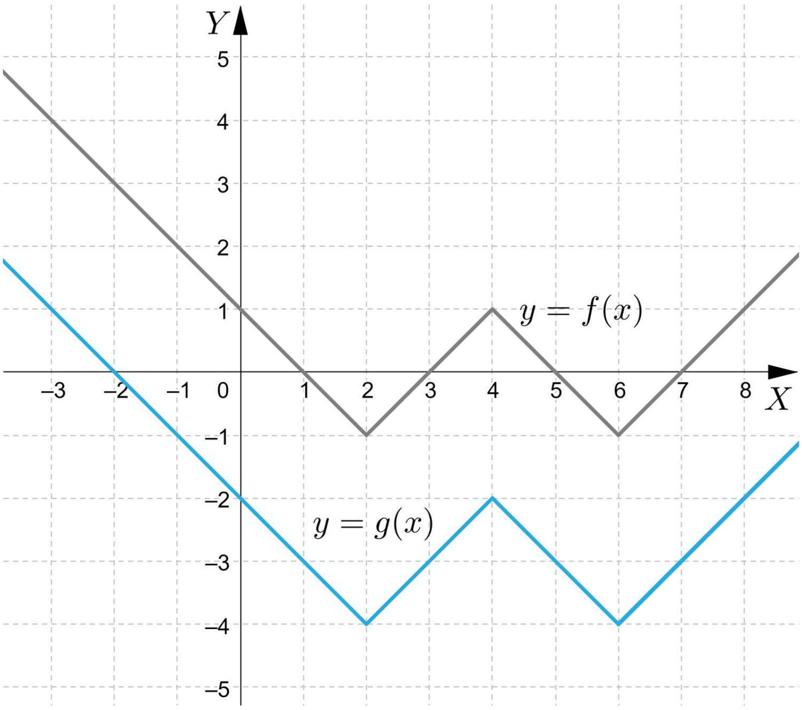
Korzystając z wykresu trzeciej funkcji symulacji interaktywnej ($f(x) = \ldots$), dokonując odpowiedniego przesunięcia wzdłuż osi Y, wyznacz dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe funkcji $y = f(x) + 4$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

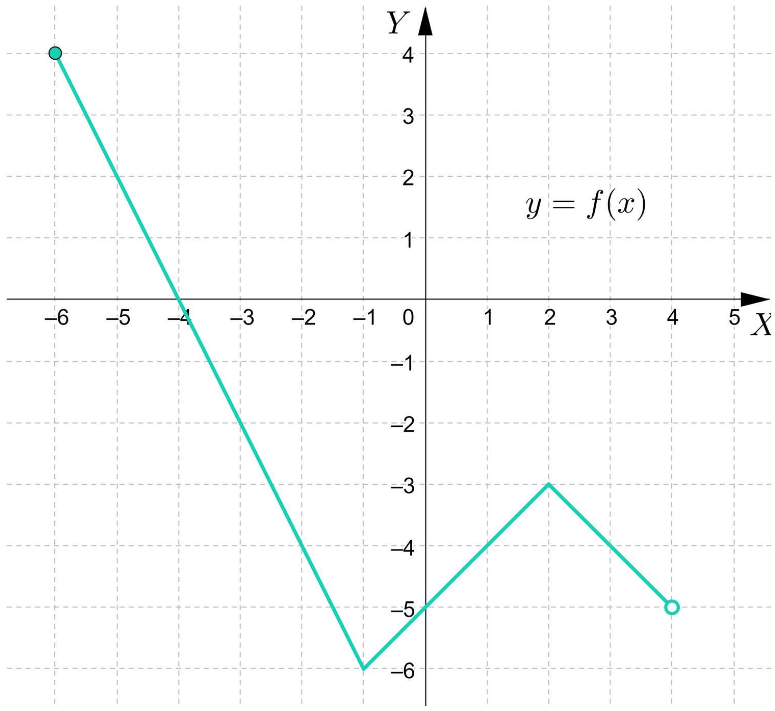
Wiedząc, że $D_f = (-7,\ 2\rangle$, $ZW_f = \langle -4,\ 6\rangle$ przyporządkuj poprawne informacje do poszczególnych funkcji.

Ćwiczenie 5

Zbiorem wartości funkcji f jest $ZW_f = (-3,\ 6\rangle$. Połącz wzór funkcji g z jej zbiorem wartości.

Ćwiczenie 6

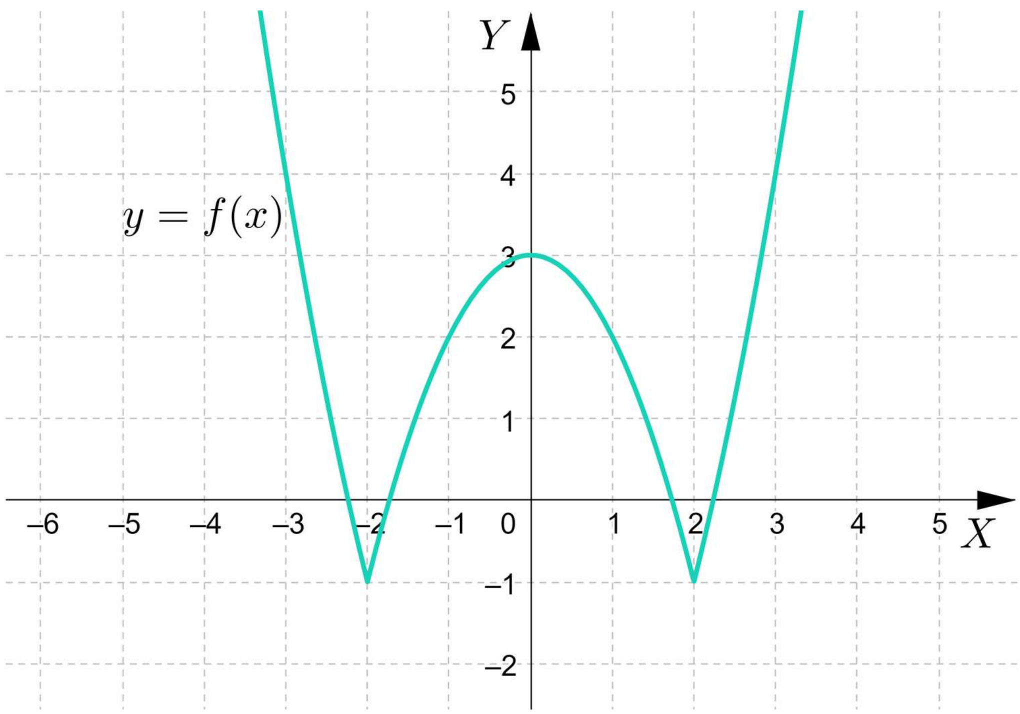
Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$



Określamy funkcję g wzorem $g(x) = f(x) + 4$. Wyznacz D_g, ZW_g, punkt przecięcia wykresu funkcji g z osią Y.

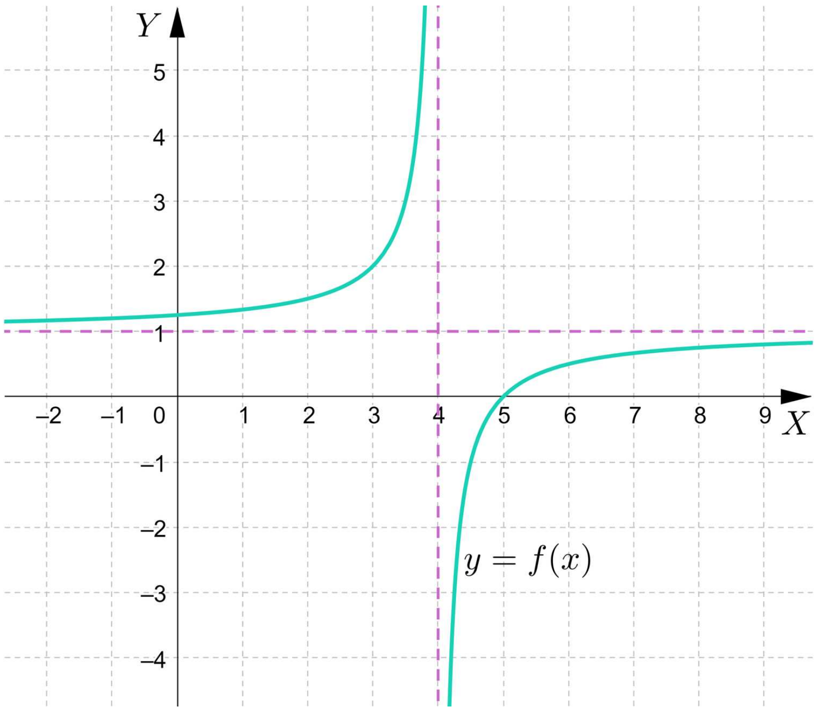
Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Połącz w pary wzór funkcji g z jej własnością.



Ćwiczenie 8

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$



Ćwiczenie 9

Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 - 3$, gdzie $x \in \langle -1,\ 3 \rangle$. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $g(x) = \ 2x^2 + 1$ oraz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle -1,\ 3 \rangle$.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Alabrudzińska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykres funkcji $y = f(x) + q$ i określa jej własności.

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykres funkcji $y = f(x) + q$, $y = f(x) - q$, gdzie $q > 0$;
- odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą, wartość największą, współrzedne punktu przecięcia z osią Y);
- mając przekształcony wzór danej funkcji zgodnie z poznanymi zasadami wynikającymi z przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi Y oraz własności danej funkcji, podaje

właności przekształconej funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- celofan , pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przypominają sobie podstawowe własności funkcji (dziedzina, zbiór wartości, najmniejsza wartość funkcji, największa wartość funkcji, współrzedne punktu przecięcia z osią Y) oraz zasady przesuwania wykresu funkcji wzdłuż osi Y.

Faza wstępna:

- Nauczyciel dzieli klasę na zespoły 4-osobowe np. odliczając do czterech.
- Nauczyciel omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie w zespołach zapoznają się z informacjami zamieszczonymi w sekcji „Przeczytaj”. Zadaniem każdego zespołu jest przygotowanie mapy myśli, która będzie zestawieniem wszystkich istotnych zasad charakteryzujących przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi Y. Korzystając z przygotowanej mapy myśli grupy wykonują polecenia z sekcji „Symulacja interaktywna”.

Faza podsumowująca:

- Każda grupa prezentuje swoją mapę myśli. Nauczyciel przyznaje punkty każdej grupie z uzasadnieniem. Na zakończenie zajęć uczniowie wykonują ćwiczenia 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”. Jeśli pojawiły się niejasności w czasie pracy zespołów, problem zostaje przedstawiony na forum i wspólnie zostaje rozwiązany. Nauczyciel przyznaje punkty za wykonanie poleceń, sumuje i proponuje nagrody w postaci ocen, podsumowując pracę zespołów.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia 4 – 8.

Materiały pomocnicze:

- Przesunięcie punktu w układzie współrzędnych
- Przesunięcia wykresu wzdłuż osi układu współrzędnych
- Przesunięcie wykresów funkcji

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można wykorzystać realizując tematy związane z przekształcaniem wykresów funkcji.