



Okrąg wpisany w trójkąt

Materiał składa się z sekcji: "Okrąg wpisany w wielokąt", "Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt", "Środek okręgu wpisanego w trójkąt".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia w tym interaktywne

Zawartość tekstowa - twierdzenie o punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta.

Przykłady - określenie okręgu wpisanego w wielokąt, konstrukcja okręgu wpisanego w kąt (aplet), konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt (aplet).

Ćwiczenia - konstrukcja okręgu wpisanego w kąt (trójkąt), znajdowanie środka okręgu wpisanego w trójkąt, własności okręgu wpisanego w trójkąt.

Okrąg wpisany w trójkąt

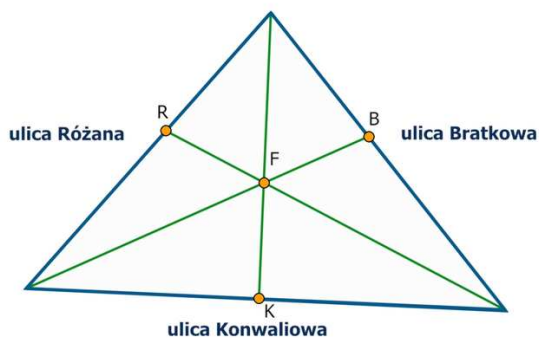
Analizując przykłady zawarte w tym materiale:

- poznasz definicję okręgu wpisanego w wielokąt,
- skonstruujesz okrąg wpisany w trójkąt,
- znajdziesz środek okręgu wpisanego w trójkąt,
- wykorzystasz własności trójkąta opisanego na okręgu w zadaniach geometrycznych.

Rozwiązując ćwiczenia – sprawdzisz ukształtowane umiejętności.

Okrąg wpisany w wielokąt

Zapoznaj się z filmem, w którym dowiesz się, gdzie leży punkt znajdujący się w tej samej odległości od każdego boku trójkąta.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1G3gwOOCA40D>

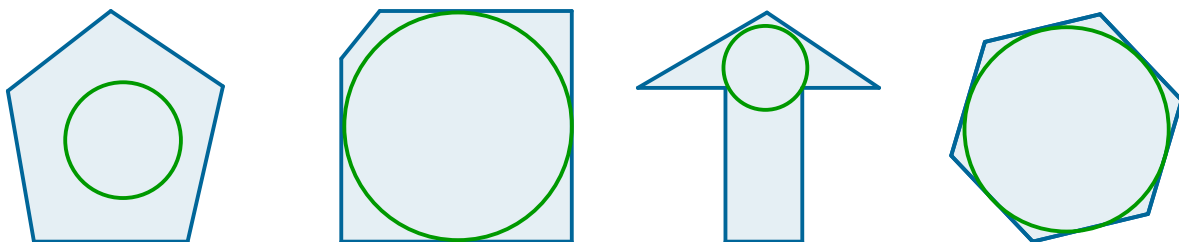
Dział III_Okrąg wpisany w trójkąt_1770

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia który punkt wewnątrz trójkąta jest jednakowo odległy od wszystkich jego wierzchołków.

Przykład 1

Jak położone są boki wielokątów i okręgów na kolejnych rysunkach? Ile mają punktów wspólnych?

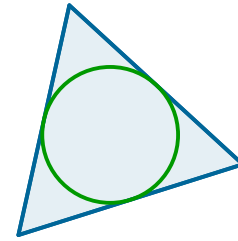
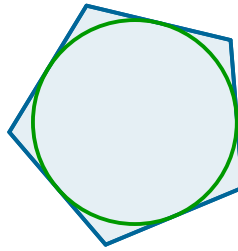
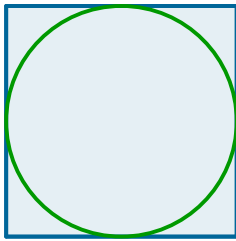


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że jeżeli okrąg jest zawarty w wielokącie, to okrąg nie ma punktów wspólnych z bokami wielokąta lub niektóre z boków wielokąta mogą być styczne do okręgu.

Przykład 2

Co można powiedzieć o wzajemnym położeniu boków wielokątów i okręgów?
Jak nazywamy punkt wspólny prostej i okręgu?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Okrąg wpisany w wielokąt

Jeśli każdy z boków wielokąta jest styczny do okręgu, to ten wielokąt nazywamy opisanym na okręgu. Okrąg nazywamy wtedy wpisanym w wielokąt.

Własność: Odległość środka okręgu

Odległość środka okręgu wpisanego w wielokąt od każdego z boków tego wielokąta jest równa promieniowi tego okręgu.

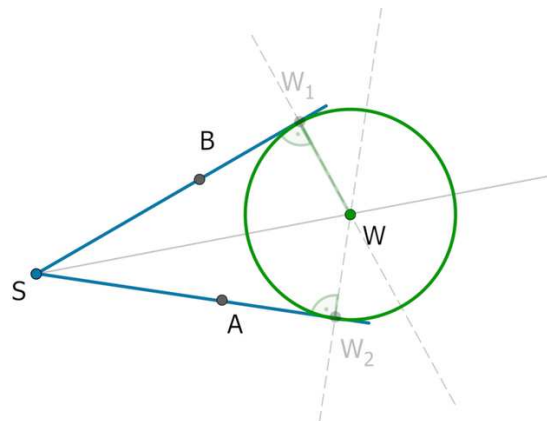
Przykład 3

Skonstruujemy okrąg wpisany w dany kąt ASB .

Opis konstrukcji:

- Konstruujemy dwusieczną kąta ASB .
- Na dwusiecznej zaznaczamy dowolny punkt, który oznaczamy W .
- Przez punkt W prowadzimy prostopadłe do ramion kąta.
- Punkt przecięcia jednej z tych prostych z ramieniem SB oznaczamy W_1 , a punkt przecięcia drugiej prostopadłej z ramieniem SA oznaczamy W_2 .
- Odcinek WW_1 jest promieniem szukanego okręgu.
- Z punktu W kreślimy okrąg o promieniu WW_1 . Otrzymany okrąg jest styczny w punktach W_1 i W_2 do obu ramion kąta, jest więc szukanym okręgiem.

Poniższy film pokazuje kolejne kroki konstrukcji.



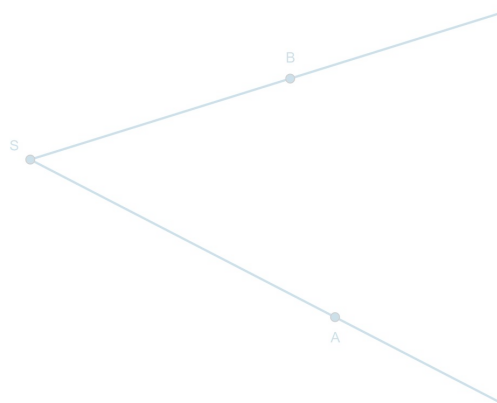
Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1aTt3pIFntSf>

Dział III_Okrąg wpisany w trójkąt_okrąg wpisany w _kat

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak skonstruować okrąg wpisany w kąt.

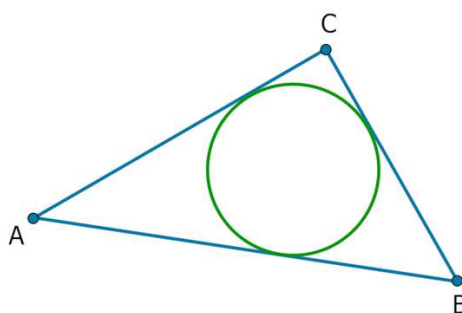
Zapoznaj się z poniższym apletem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PqcPxuJAB>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R16lev0FHUvfv>

Dział III_Okrąg wpisany w trójkąt_okrąg wpisany_w trk

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób skonstruować okrąg wpisany w dany trójkąt.

Środek okręgu jest w punkcie przecięcia dwóch dwusiecznych kątów. Można skonstruować trzecią dwusieczną, która przetnie się z pozostałymi w tym samym punkcie.

Przykład 4

Konstruujemy okrąg wpisany w dany trójkąt ABC .

Opis konstrukcji

- Konstruujemy dwusieczne kątów ABC i CAB trójkąta.
- Oznaczamy O – punkt przecięcia dwusiecznych.
- Przez punkt O prowadzimy prostą prostopadłą do boku AB trójkąta.
- Oznaczamy D – punkt przecięcia prostopadłej z bokiem AB .
- Z punktu O kreślimy okrąg o promieniu DO .
- Narysowany okrąg jest styczny do każdego z ramion trójkąta, jest więc szukany okrąg.

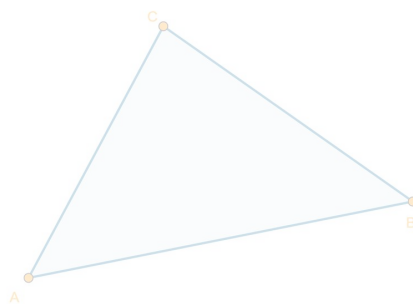
Okrąg wpisany w trójkąt

etap 1 z 6



Dany jest trójkąt ABC.
Skonstruujemy okrąg wpisany
w ten trójkąt,
czyli styczny do boków tego trójkąta.

Uwaga:
Zmieniając położenie punktów A, B i C, możesz
zaobserwować własność dla innych trójkątów.



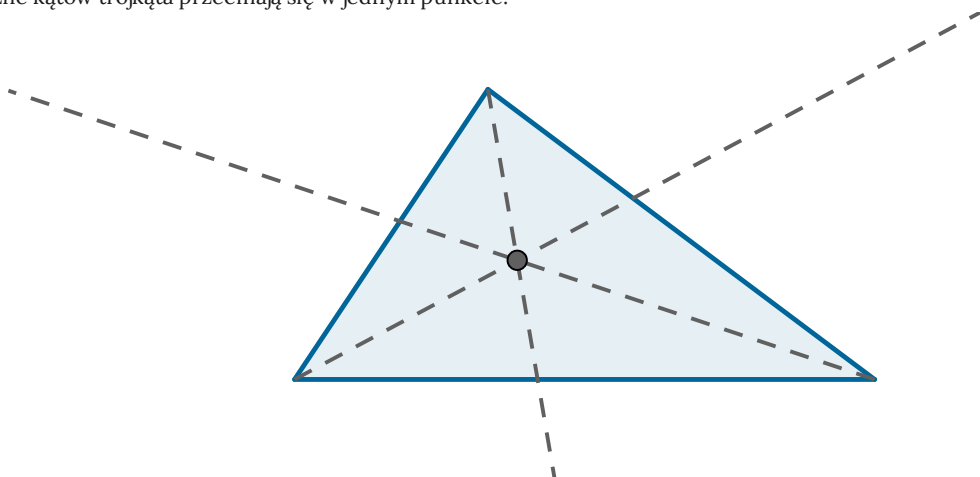
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PqcPxuJAB>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt

Twierdzenie: Punkt przecięcia dwusiecznych kąta

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

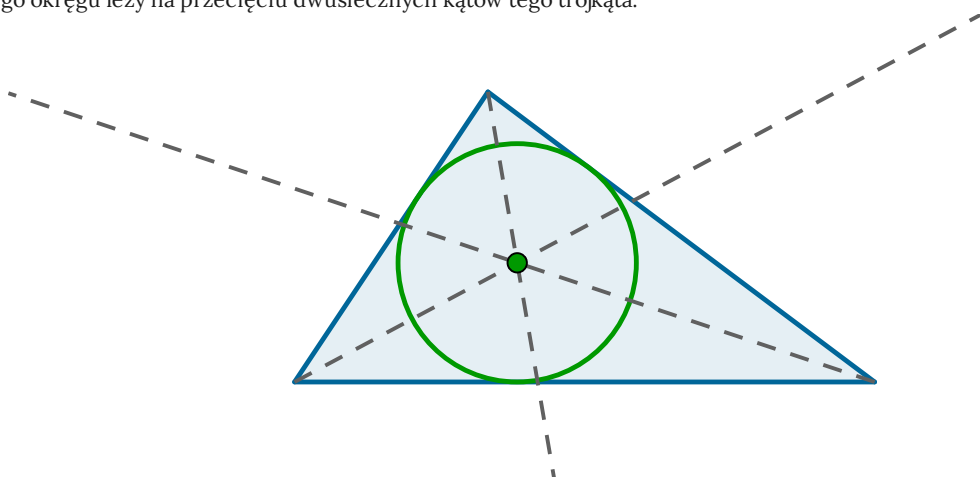


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Środek tego okręgu leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego trójkąta.

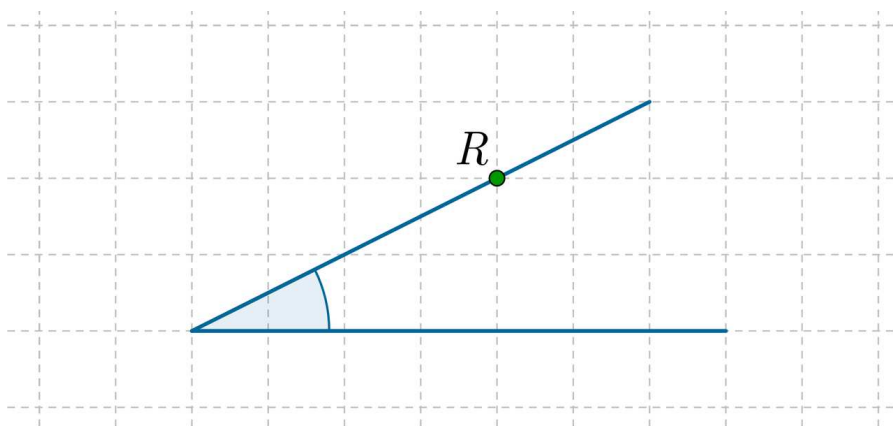


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

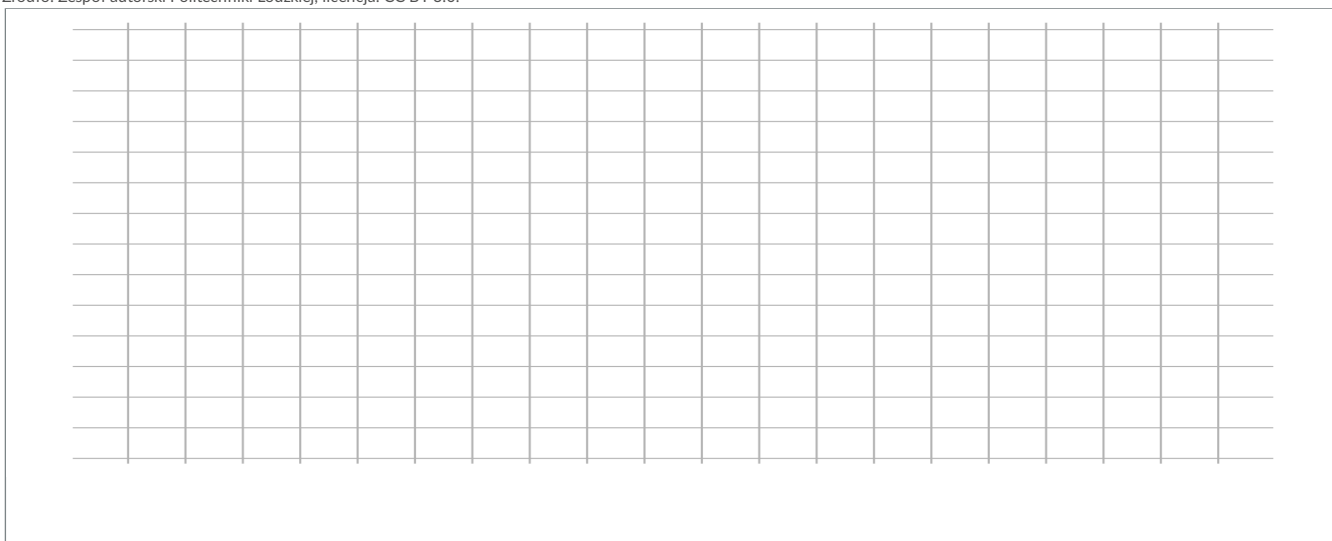
Ćwiczenie 1



Wpisz okrąg w kąt, tak aby był styczny do jednego z ramion w punkcie R .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

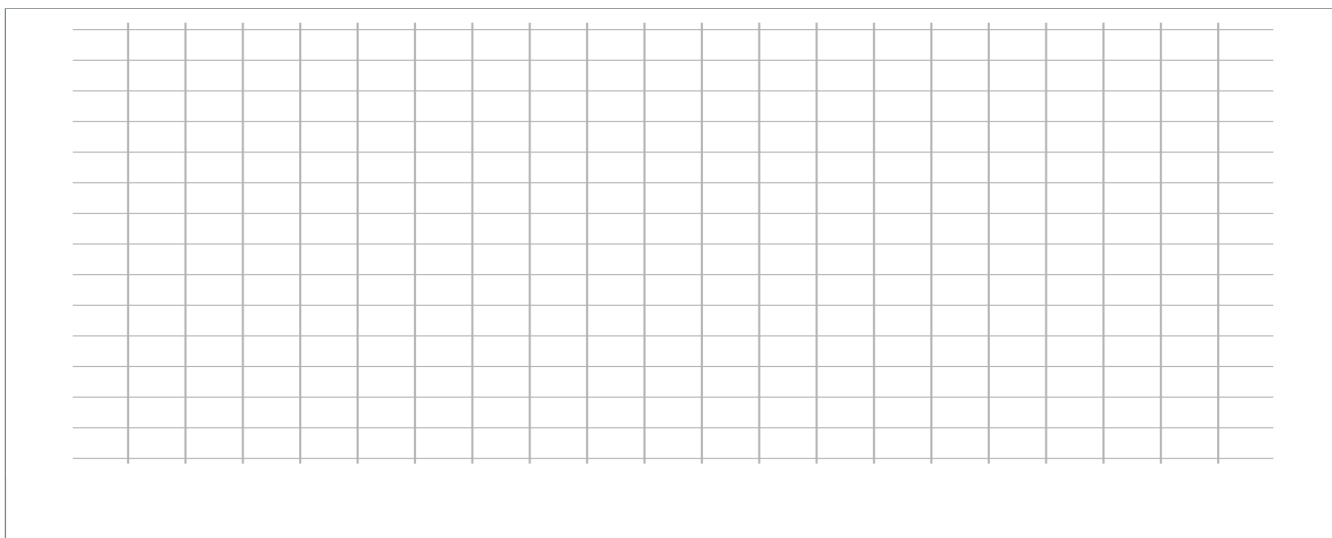


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Narysuj dowolny kąt o mierze 40° i wpisz w niego okrąg.

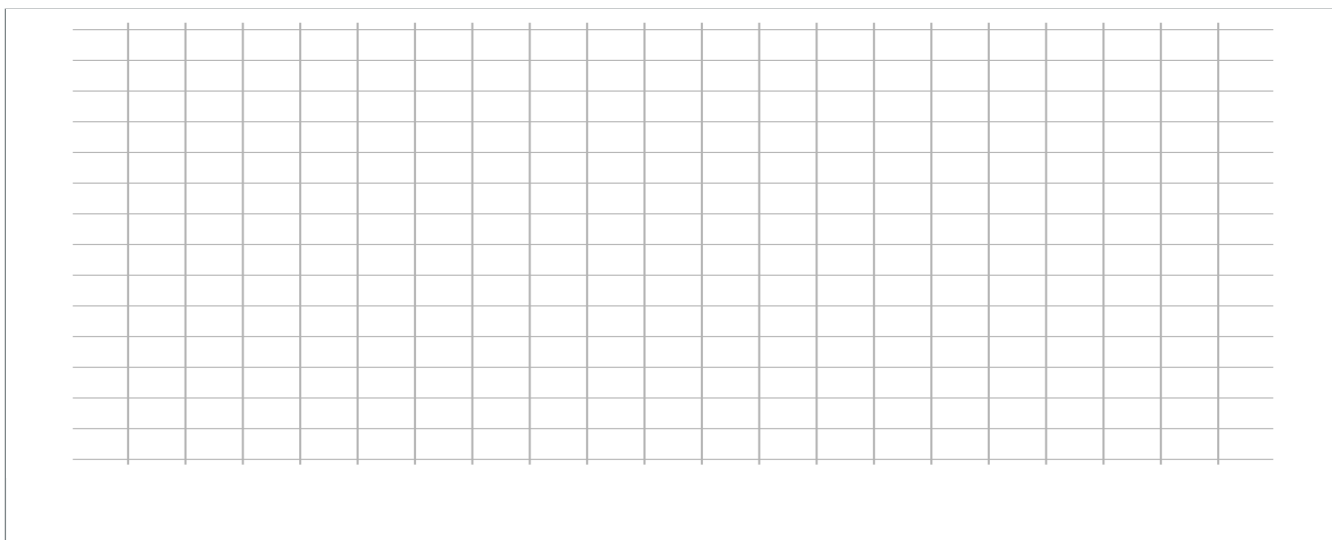


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Znajdź środek okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



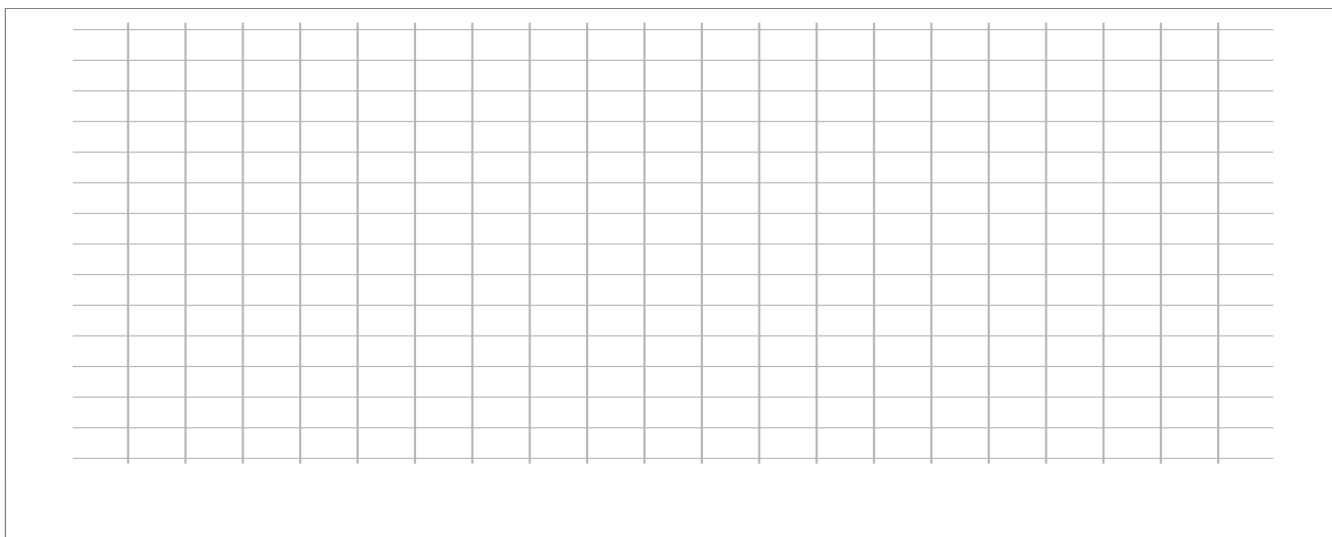
Skonstruuj kąt α i wpisz w ten kąt okrąg, jeśli

1. $\alpha = 60^\circ$,

2. $\alpha = 45^\circ$,

3. $\alpha = 30^\circ$,

4. $\alpha = 105^\circ$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia:

☐ symetralnych boków tego trójkąta.

☐ wysokości tego trójkąta.

☐ dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Jeśli okrąg jest wpisany w trójkąt, to trójkąt ten jest:

☐ wpisany w okrąg.

☐ równoboczny.

☐ opisany na okręgu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży:

☐ na jednym z boków trójkąta.

☐ we wnętrzu tego trójkąta.

☐ na zewnątrz trójkąta.

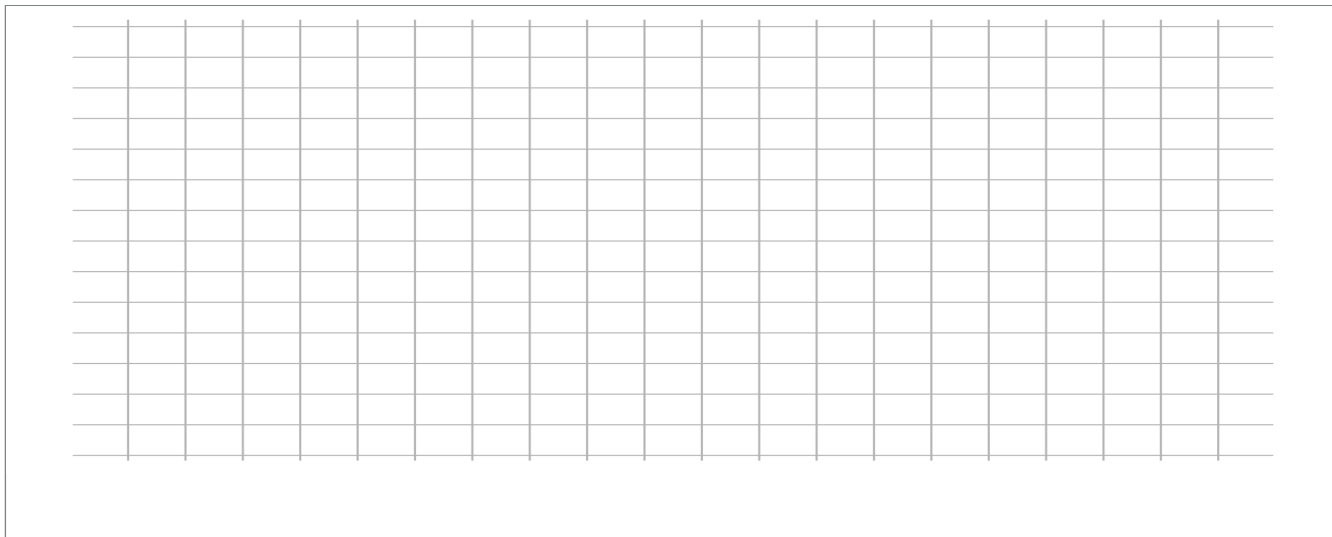
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Skonstruuj okrąg wpisany w trójkąt

1. prostokątny,
2. równoboczny,
3. równoramienny,
4. rozwartokątny.

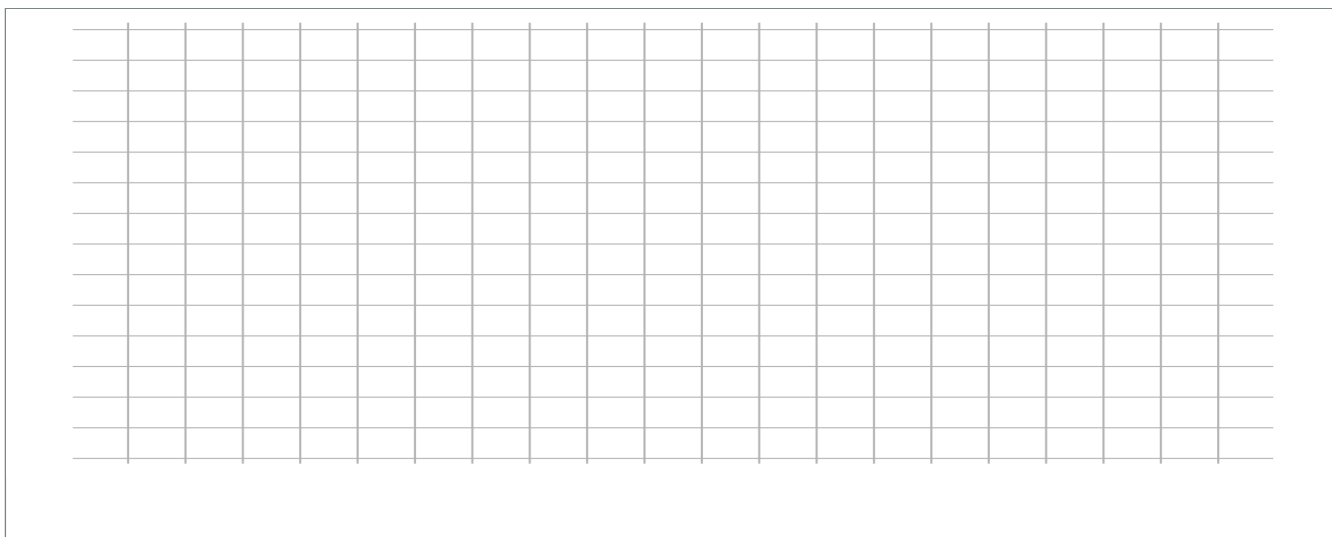


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Narysuj trójkąt, w którym miary kątów wynoszą: 30° , 120° , 30° . Skonstruuj okrąg wpisany w ten trójkąt.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



W trójkąt prostokątny wpisz okrąg i na trójkącie prostokątnym opisz okrąg.

Odpowiedz, gdzie w każdym przypadku leży środek tego okręgu?

Promień którego z okręgów jest większy?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

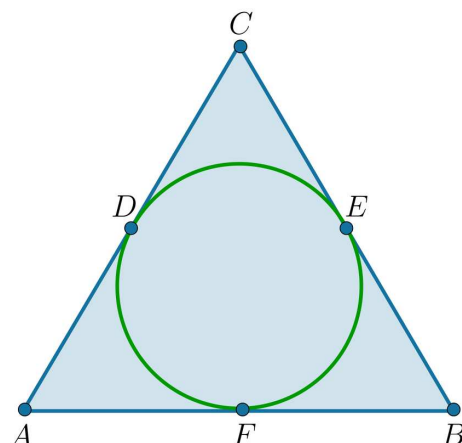
- ☐ Wysokość w trójkącie równobocznym jest sumą długości promienia okręgu wpisanego oraz promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
- ☐ W trójkąt rozwartokątny można wpisać okrąg.
- ☐ Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest zarazem środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W trójkąt równoboczny ABC wpisano okrąg. Punkty styczności okręgu z bokami tego trójkąta oznaczono D, E, F tak jak na rysunku.

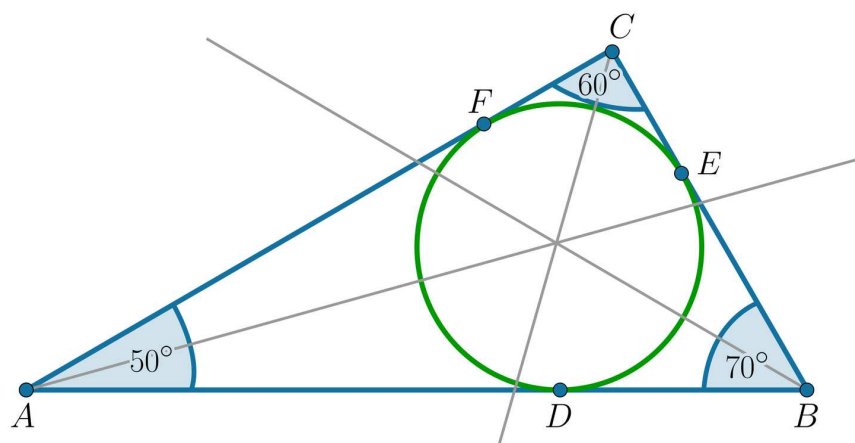


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykaż, że

$$|AF| = |FB| = |BE| = |EC| = |CD| = |DA|.$$

Ćwiczenie 13



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkąt ABC o kątach 50° , 70° , 60° wpisano okrąg. Punkty D, E, F są punktami styczności tego okręgu z ramionami trójkąta. Oblicz miary kątów. Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie liczby w kolejności malejącej.

- Miary kątów, jakie tworzą między sobą promienie tego okręgu poprowadzone ze środka okręgu do punktów D, E, F wynoszą:

°, °, °.

- Miary kątów w trójkącie DEF wynoszą: °, °, °.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku w punkcie O . Okrąg ten jest styczny do boków trójkąta w punktach odpowiednio D , E , F . Miara kąta DOE jest równa 130° , a miara kąta DOF jest równa 120° . Ile wynosi miara kąta ACB ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 70°

☐ 60°

☐ 90°

☐ 100°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



W trójkąt równoboczny ABC wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu 10 cm. Ile wynosi wysokość trójkąta AOB poprowadzona z wierzchołka O ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 4 cm

☐ 5 cm

☐ 15 cm

☐ 10 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Na okręgu o środku w punkcie O opisany jest trójkąt ABC . Kąt CAB jest kątem prostym. Okrąg ten jest styczny do boku AC w punkcie D , a do boku AB w punkcie E .

Dokończ zdanie, wybierając wszystkie poprawne stwierdzenia.

Czworokąt $AEOD$ ma:

☐ wszystkie boki równe.

☐ jeden kąt rozwarty.

☐ dokładnie jeden kąt prosty.

☐ co najmniej jeden kąt prosty.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



W trójkąt o bokach długości 6 cm, 10 cm, 8 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego trójkąta. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 26 cm²

☐ 24 cm²

☐ 28 cm²

☐ 22 cm²

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach długości 5 dm, 12 dm, 13 dm. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 8 dm

☐ 1 dm

☐ 2 dm

☐ 4 dm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Trójkąt równoboczny ABC opisany jest na okręgu o promieniu 6 cm i środku w punkcie O . Punkty E , F , G są punktami styczności okręgu i trójkąta. Punkt E leży na boku AC , punkt G na boku AB .

Uzupełnij poniższe luki. Kliknij w nie, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

1. Miary kątów czworokąta $EAGO$ to .

2. Miary kątów trójkąta BOF to .

3. Miary kątów czworokąta $ACBO$ to .

4. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość .

11 cm

10 cm

12 cm

40°, 110°, 140°, 70°

30°, 80°, 70°

15 cm

60°, 90°, 120°, 90°

9 cm

50°, 45°, 65°, 200°

30°, 60°, 30°, 240°

30°, 60°, 90°

40°, 50°, 90°

50°, 100°, 130°, 80°

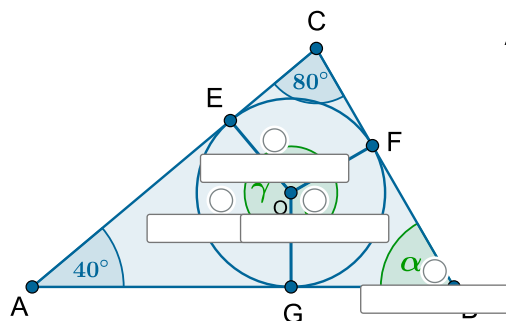
50°, 40°, 60°, 210°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

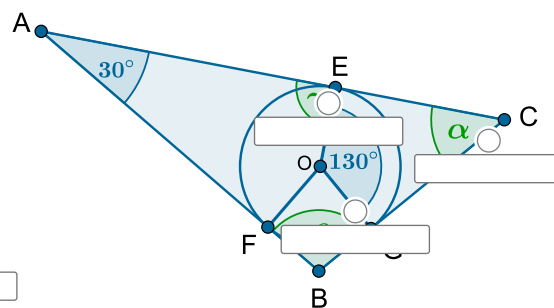
Ćwiczenie 20

W trójkąt ABC wpisany jest okrąg o środku w punkcie O . Punkty E, F, G są punktami styczności okręgu i trójkąta. Oblicz miary zaznaczonych kątów. Przeciągnij odpowiednie wartości kątów, uzupełniając luki na rysunkach.

a)



b)



100° 100° 50° 140° 60° 90° 120°

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.