Działania na pochodnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Działania na pochodnych

Źródło: Lalo Hernandez, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pojęcie pochodnej staje się efektywnym narzędziem w procesie badania funkcji. W tym materiale poznasz kolejne własności pochodnej, dzięki którym będziesz w stanie wyznaczać pochodne kombinacji arytmetycznych funkcji potęgowych. Jak zobaczysz, pojęcie pochodnej posiada przydatne własności arytmetyczne.

> **Twoje cele**
>
> - Sklasyfikujesz najważniejsze własności arytmetyczne pojęcia pochodnej.
> - Zastosujesz poznane twierdzenia, aby wyznaczyć przykładowe pochodne sumy funkcji, różnicy funkcji, iloczynu funkcji oraz ilorazu funkcji.

Przeczytaj

Nasze rozważania rozpoczniemy od wprowadzenia własności pochodnej sumy dwu funkcji.

Twierdzenie: Pochodna sumy funkcji

Jeśli funkcje $f, g: A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, są różniczkowalne w dowolnym punkcie $x \in A$, to w punkcie $x \in A$ istnieje również pochodna sumy funkcji $f+g$ oraz

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Innymi słowy, pochodna sumy funkcji różniczkowalnych jest równa sumie pochodnych tych funkcji.

Przykład 1

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = x^4 + x^6$.

Rozwiązanie

Korzystając z powyższego twierdzenia dla funkcji $f(x) = x^4$ i $g(x) = x^6$ oraz z wzoru na pochodną funkcji potęgowej, otrzymamy
$h'(x) = (f(x)+g(x))' = \left(x^4 + x^6\right)' = \left(x^4\right)' + \left(x^6\right)' = 4x^3 + 6x^5$

Przykład 2

Wyznaczymy pochodną sumy funkcji postaci $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x^9}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z powyższego twierdzenia oraz z wzoru opisującego pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym. Wówczas
$(f(x)+g(x))' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^9}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{x^9}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{-9}\right)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} + (-9) \cdot x^{-9-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 9x^{-10} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{x^{10}}.$

Własność analogiczna do powyższej zachodzi również dla pochodnej różnicy funkcji.

Twierdzenie: Pochodna różnicy funkcji

Jeśli funkcje $f, g: A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, są różniczkowalne w dowolnym punkcie $x \in A$, to w punkcie $x \in A$ istnieje także pochodna różnicy funkcji $f-g$ oraz

$$(f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Tak więc pochodna różnicy funkcji różniczkowalnych to różnica pochodnych tych funkcji.

Dla zainteresowanych

Pochodna różnicy funkcji $f - g$ w punkcie $x \in A$ jest równa różnicy pochodnych funkcji f i g w tym punkcie. Zauważ, że fakt ten wynika bezpośrednio z poprzedniego twierdzenia, gdyż różnicę funkcji $f - g$ możemy zapisać w postaci $f + (-g)$.

Przykład 3

Wyznaczymy pochodną funkcji $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy powyższe twierdzenie. Pochodną różnicy funkcji w punkcie można wyrazić jako różnicę pochodnych tych funkcji, zatem dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, dostaniemy
$(f(x) - g(x))' =$
$= \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)' =$
$= \left(\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' =$
$= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - \left(x^{-1}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} - (-1) \cdot x^{-1-1} == \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2}.$

Twierdzenia wyrażające pochodne sumy bądź różnicy dwóch funkcji pozostają prawdziwe dla sumy bądź różnicy dowolnej liczby funkcji, o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie: Pochodna sumy/różnicy n funkcji

Jeśli funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, są różniczkowalne w dowolnym punkcie $x \in A$, to w punkcie $x \in A$ istnieje również pochodna funkcji $f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n$ oraz

$$(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))' = (f_1(x))' \pm (f_2(x))' \pm \ldots \pm (f_n(x))'.$$

Przykład 4

Wyznaczymy pochodną funkcji $x^7 - \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z wprowadzonej wyżej własności. Wówczas
$\left(x^7 - \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x}\right)' =$
$= \left(x^7\right)' - \left(\frac{1}{x^4}\right)' + \left(\sqrt[4]{x}\right)' =$
$= \left(x^7\right)' - \left(x^{-4}\right)' + \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' =$
$= 7x^6 - (-4) \cdot x^{-4-1} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} =$

$= 7x^6 + 4x^{-5} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} =$
$= 7x^6 + \frac{4}{x^5} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

W kolejnym twierdzeniu wprowadzimy własność, dzięki której wyznaczymy pochodną dowolnego iloczynu funkcji.

Twierdzenie: Pochodna iloczynu funkcji

Jeżeli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, są różniczkowalne w dowolnym punkcie $x \in A$, to w punkcie $x \in A$ istnieje również pochodna iloczynu funkcji $f \cdot g$ oraz

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Szczególnym przypadkiem powyższego wzoru jest sytuacja, w której jedna z funkcji występujących w iloczynie jest funkcją stałą.

Twierdzenie: Pochodna iloczynu funkcji f przez stałą

Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, jest różniczkowalna w dowolnym punkcie $x \in A$ oraz $a \in \mathbb{R}$, to w punkcie $x \in A$ istnieje również pochodna iloczynu $a \cdot f$ oraz

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x).$$

Dla zainteresowanych

Zauważ, że powyższy wzór bezpośrednio wynika z wcześniejszego twierdzenia. Dla $g(x) = a$ otrzymamy
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$
$= f'(x) \cdot a + f(x) \cdot (a)' = f'(x) \cdot a + f(x) \cdot 0 =$
$= f'(x) \cdot a + 0 = a \cdot f'(x).$

Wyznaczymy najpierw przykładową pochodną iloczynu funkcji przez stałą.

Przykład 5

Wyznaczymy pochodną funkcji $g(x) = 6x^4$.

Rozwiązanie

Zgodnie z wprowadzonym powyżej wzorem, stałą $a = 6$ możemy wyłączyć przed znak pochodnej. Zatem dla $f(x) = x^4$, uzyskamy
$g'(x) = (a \cdot f(x))' = \left(6 \cdot x^4\right)' = 6 \cdot \left(x^4\right)' = 6 \cdot 4x^3 = 24x^3.$

W kolejnym przykładzie znajdziemy pochodną iloczynu dwu funkcji potęgowych.

Przykład 6

Wyznaczymy pochodną iloczynu funkcji postaci $x^3 \cdot \sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Stosując wprowadzony powyżej wzór dla funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt{x}$, pochodna iloczynu $x^3 \cdot \sqrt{x}$ będzie postaci $(f(x) \cdot g(x))' = \left(x^3 \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \sqrt{x} + x^3 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$
$= 3x^2 \cdot \sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 3x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}$.

Powyższe twierdzenia stają się bardzo użyteczne przy wyznaczaniu pochodnych funkcji będących sumą bądź różnicą funkcji potęgowych, co pokażemy w kolejnym przykładzie.

Przykład 7

Wyznaczymy pochodną funkcji $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 5\sqrt[5]{x} - \frac{3}{x^{12}}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Wykorzystując przedstawione twierdzenia dotyczące pochodnych sumy funkcji, różnicy funkcji oraz iloczynu funkcji przez stałą, otrzymamy
$f'(x) = \left(6x^3 - 2x^2 + 5\sqrt[5]{x} - \frac{3}{x^{12}}\right)' =$
$= \left(6x^3\right)' - \left(2x^2\right)' + \left(5\sqrt[5]{x}\right)' - \left(\frac{3}{x^{12}}\right)' == 6 \cdot \left(x^3\right)' - 2 \cdot \left(x^2\right)' + 5\left(\sqrt[5]{x}\right)' - 3\left(\frac{1}{x^{12}}\right)' =$
$= 6 \cdot \left(x^3\right)' - 2 \cdot \left(x^2\right)' + 5\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' - 3\left(x^{-12}\right)' =$
$= 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} - 3 \cdot (-12)x^{-12-1} =$
$= 18x^2 - 4x + x^{-\frac{4}{5}} + 36x^{-13} = 18x^2 - 4x + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{36}{x^{13}}$.

W kolejnym twierdzeniu poznamy wzór pozwalający wyznaczyć pochodną ilorazu funkcji.

Twierdzenie: Pochodna ilorazu funkcji

Jeżeli funkcje $f, g:\ A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, są różniczkowalne w dowolnym punkcie $x \in A$ i $g(x) \neq 0$ dla $x \in A$, to istnieje pochodna ilorazu funkcji $\frac{f}{g}$ oraz

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Przykład 8

Wyznaczymy pochodną funkcji $\frac{x^6}{\sqrt{x^3}}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Stosując wzór na pochodną ilorazu dla funkcji $f(x) = x^6$ i $g(x) = \sqrt{x^3}$, dostaniemy
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{x^6}{\sqrt{x^3}}\right)' = \frac{\left(x^6\right)' \cdot \sqrt{x^3} - x^6 \cdot \left(\sqrt{x^3}\right)'}{\left(\sqrt{x^3}\right)^2} =$

$$= \frac{6x^5 \cdot x^{\frac{3}{2}} - x^6 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1}}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{6x^{\frac{13}{2}} - \frac{3}{2} x^{\frac{13}{2}}}{x^3} = \frac{\frac{9}{2} x^{\frac{13}{2}}}{x^3} = \frac{9\sqrt{x^{13}}}{2x^3}.$$

Wykorzystamy teraz wszystkie wprowadzone powyżej wzory wyrażające własności arytmetyczne pochodnej.

Przykład 9

Wyznaczymy pochodną funkcji $f(x) = \frac{6x^7+x^2}{5x^3-x}$.

Rozwiązanie

Korzystając z własności arytmetycznych pochodnej, otrzymamy

$$f'(x) = \left(\frac{6x^7+x^2}{5x^3-x}\right)' = \frac{(6x^7+x^2)' \cdot (5x^3-x) - (6x^7+x^2) \cdot (5x^3-x)'}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{\left((6x^7)' + (x^2)'\right) \cdot (5x^3-x) - (6x^7+x^2) \cdot \left((5x^3)' - x'\right)}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{(6 \cdot 7x^6 + 2x)(5x^3-x) - (6x^7+x^2)(5 \cdot 3x^2 - 1)}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{(42x^6+2x)(5x^3-x) - (6x^7+x^2)(15x^2-1)}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{(210x^9 - 42x^7 + 10x^4 - 2x^2) - (90x^9 - 6x^7 + 15x^4 - x^2)}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{210x^9 - 42x^7 + 10x^4 - 2x^2 - 90x^9 + 6x^7 - 15x^4 + x^2}{(5x^3-x)^2} =$$
$$= \frac{120x^9 - 36x^7 - 5x^4 - x^2}{(5x^3-x)^2} = \frac{x^2(120x^7 - 36x^5 - 5x^2 - 1)}{(5x^3-x)^2}.$$

Słownik

suma funkcji $f+g$

to funkcja $f+g:\ A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

różnica funkcji $f-g$

to funkcja $f-g:\ A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

iloczyn funkcji $f \cdot g$

to funkcja $f \cdot g:\ A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

iloraz funkcji $\frac{f}{g}$

to funkcja $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

dla wszystkich $x \in A$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z następującym filmem. Następnie wykonaj kolejne polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1sJqSGj1

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej działań na pochodnych.

Polecenie 2

Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = 4x^9 + 7x^5 + \frac{4}{x^3} - 6\sqrt{x}$ dla $x > 0$.

Polecenie 3

Wyznacz pochodną funkcji $g(x) = \frac{7x^3 - 2x}{x^2 - 4}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Stosując wzór na pochodną iloczynu funkcji, wyznacz pochodną funkcji $f\left(x\right)=x^6\cdot\sqrt{x^3}$.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Korzystając z własności arytmetycznych pochodnej, wyznacz pochodną funkcji $f\left(x\right)=\frac{5x^4-\sqrt{x}}{4x^8+\sqrt{x}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kruszelnicka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na pochodnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- potrafi sklasyfikować własności arytmetyczne pojęcia pochodnej
- stosuje poznane wiadomości do wyznaczania pochodnych sumy funkcji, różnicy funkcji, iloczynu funkcji, ilorazu funkcji
- na podstawie zrealizowanych przykładów wyciąga wnioski dotyczące pochodnej iloczynu funkcji przez stałą oraz pochodnej funkcji wielomianowej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- studium przypadku
- grupy eksperckie

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz przedstawia kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Przedstawiciele grup eksperckich omawiają przydzielony temat:

- pochodna sumy funkcji wraz z przykładami
- pochodna różnicy funkcji wraz z przykładami
- pochodna iloczynu funkcji wraz z przykładami
- pochodna ilorazu funkcji wraz z przykładami

2. Każda grupa ma 5 minut na przedstawienie prezentacji swojego zagadnienia.
3. Nauczyciel wraz z całym zespołem klasowym reasumuje przedstawione wiadomości i przedstawia wnioski z nich płynące.
4. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz film samouczek.
5. Pracując indywidualnie, uczniowie wykonują polecenia umieszczone pod medium bazowym. Przy pomocy nauczyciela wyjaśniają wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania. Wspólnie

znajdują rozwiązanie problemów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Pochodne funkcji elementarnych

Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany przez nauczyciela jako rekapitulacja tematów omówionych przez grupy eksperckie.