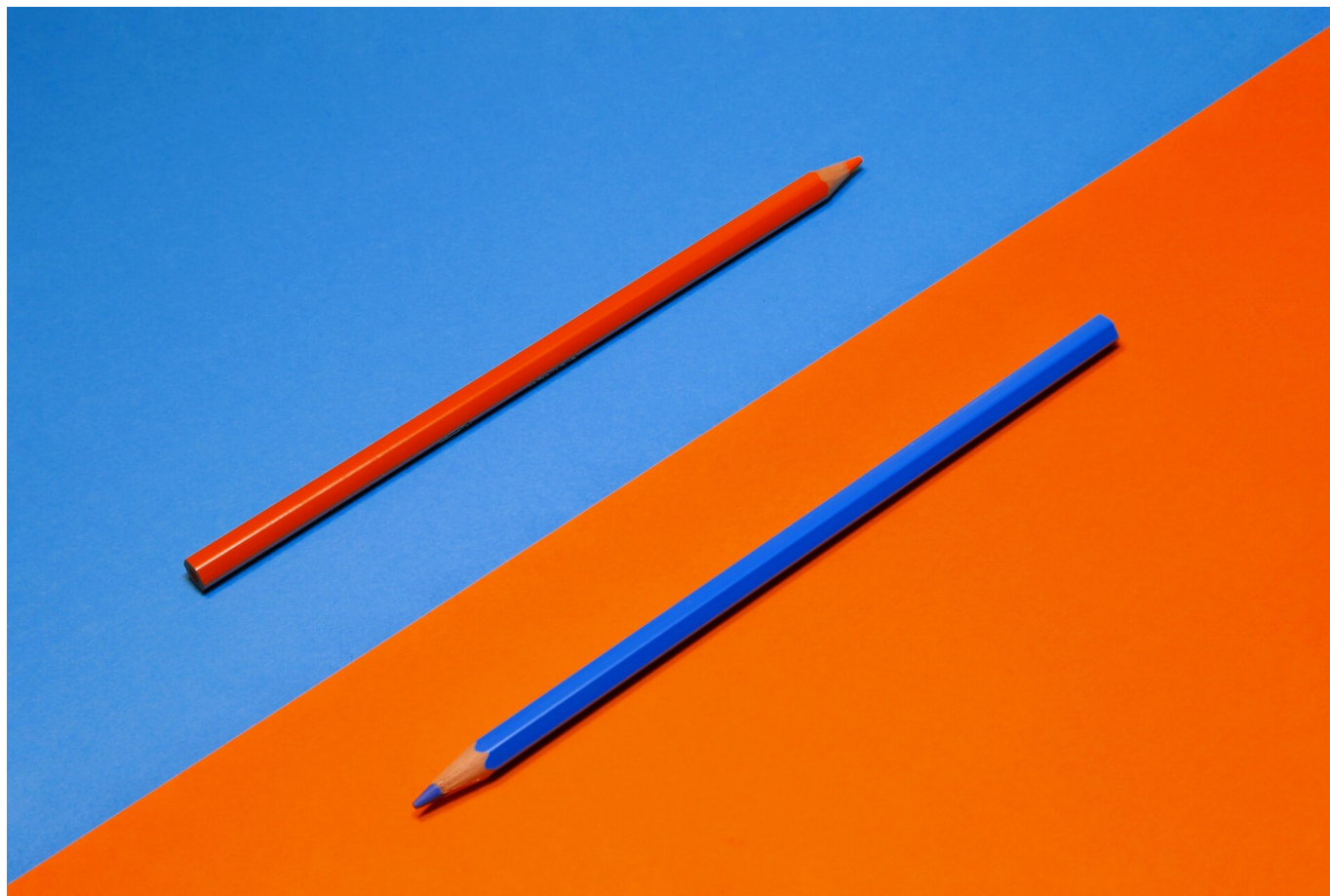




Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresów funkcji opisanych wzorami typu $y = -f(|x|) + b$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie
wykresów funkcji opisanych wzorami typu
 $y = -f(|x|) + b$

Źródło: Alice Yamamura, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, domena publiczna.

Już starożytni Grecy poszukiwali wzajemnych zależności między różnymi wielkościami. Pojęcie funkcji pojawiło się w średniowieczu, a obiektem badań funkcja stała się dopiero w pracach matematyków w XVII wieku, m.in. Fermata, Kartezjusza i Newtona.

W tym materiale zajmiemy się sporządzaniem wykresów funkcji, otrzymanych w wyniku pewnych przekształceń.

Twoje cele

- Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ narysujesz wykres funkcji $y = -f(|x|) + b$.
- Odczytasz z wykresu funkcji jej własności.

Przeczytaj

Chcąc sporządzić wykres funkcji $y = -f(|x|) + b$, szkicujemy kolejno wykresy następujących funkcji:

1. $f(x)$;

2. $f(|x|)$

- aby narysować wykres funkcji $f(|x|)$ części wykresu funkcji $f(x)$, dla których $x \geq 0$ odbijamy symetrycznie względem osi Y ; wykres funkcji $f(|x|)$ jest sumą wykresów funkcji $f(x)$ dla $x \geq 0$ i $f(-x)$ dla $x < 0$;

3. $-f(|x|)$

- wykres funkcji $-f(|x|)$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi X wykres funkcji $f(|x|)$;

4. $-f(|x|) + b$

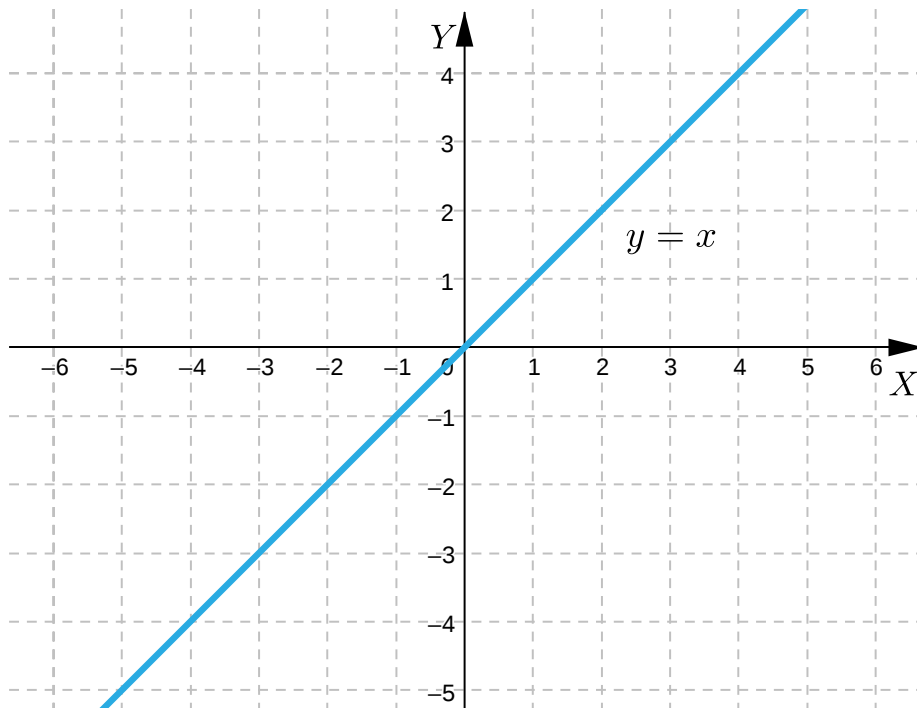
- wykres funkcji $-f(|x|) + b$ otrzymujemy przesuwając wykres funkcji $-f(|x|)$ względem osi Y o b jednostek w górę, gdy b jest liczbą dodatnią lub o b jednostek w dół, gdy b jest liczbą ujemną.

Przykład 1

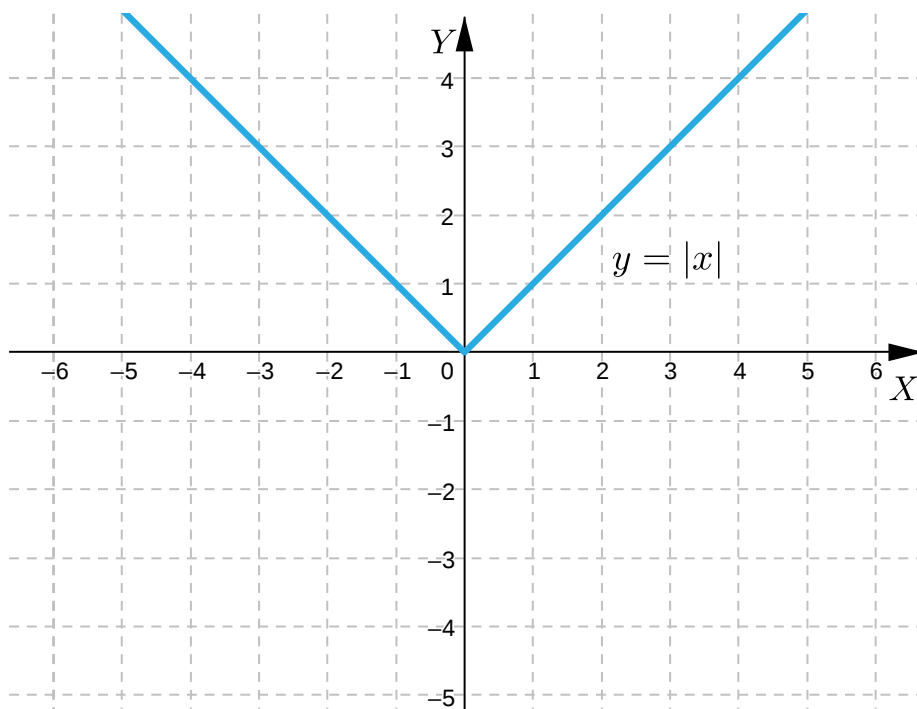
Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = x$ narysuj wykres funkcji $y = -f(|x|) + 1$.

Rozwiązanie:

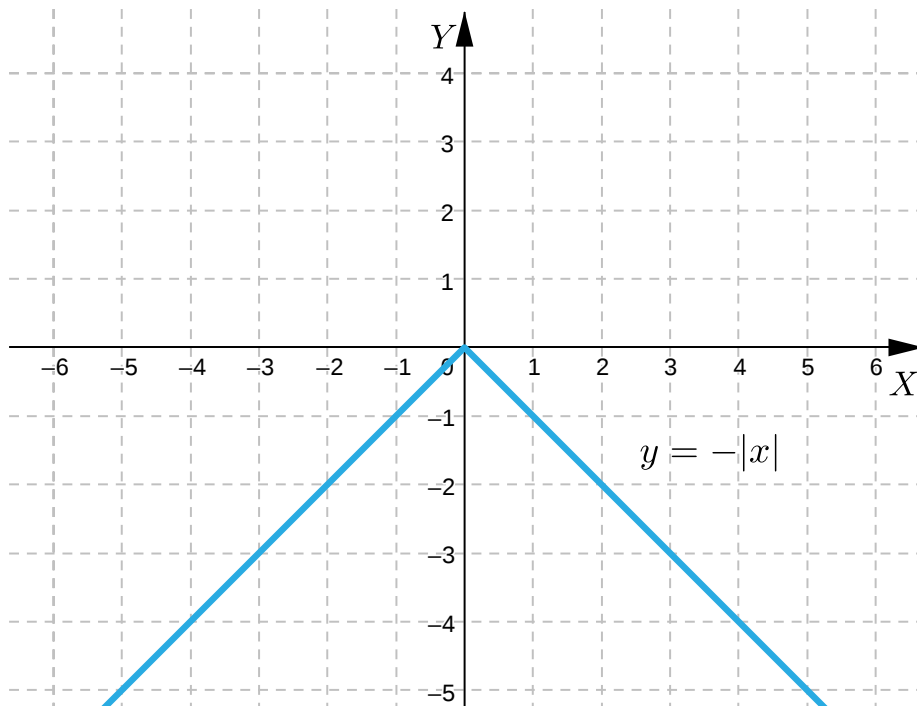
1. Rysujemy wykres funkcji $f(x) = x$.



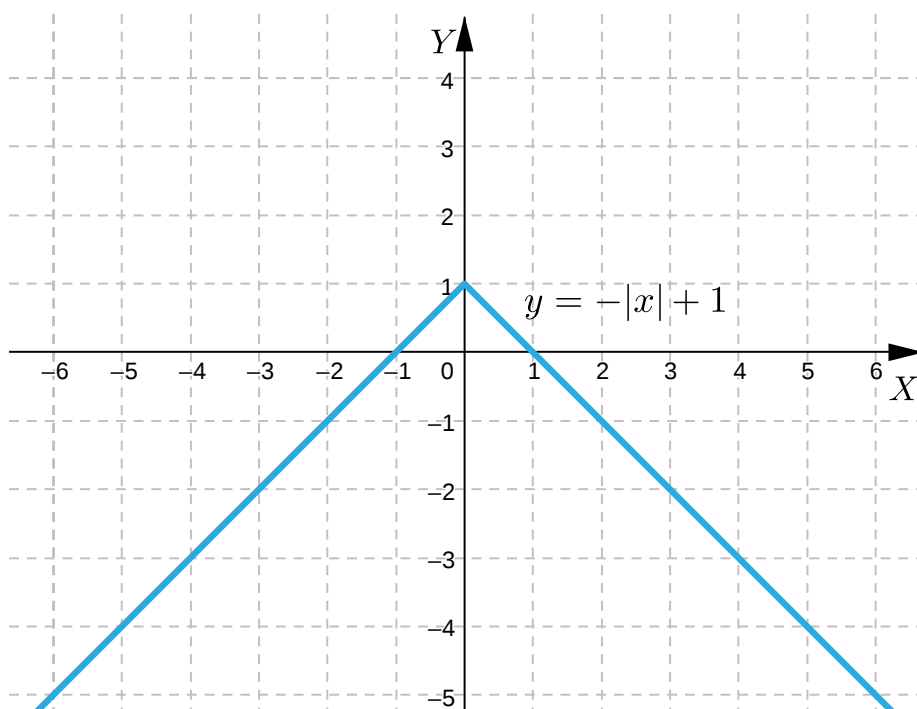
2. Rysujemy wykres funkcji $f(|x|) = |x|$. Część wykresu dla $x < 0$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi Y te części wykresu funkcji $f(x) = x$, dla których $x \geq 0$.



3. Rysujemy wykres funkcji $-f(|x|) = -|x|$. Odbijamy symetrycznie względem osi X wykres funkcji $f(|x|) = |x|$.



4. Rysujemy wykres funkcji $y = -|x| + 1$. Przesuwamy wykres funkcji $-f(|x|) = -|x|$ względem osi Y o 1 jednostkę w górę.



Przykład 2

Narysuj wykres funkcji $y = -2|x| + 3$.

Rozwiązanie:

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji $y = 2x$, $y = 2|x|$, $y = -2|x|$, $y = -2|x| + 3$.

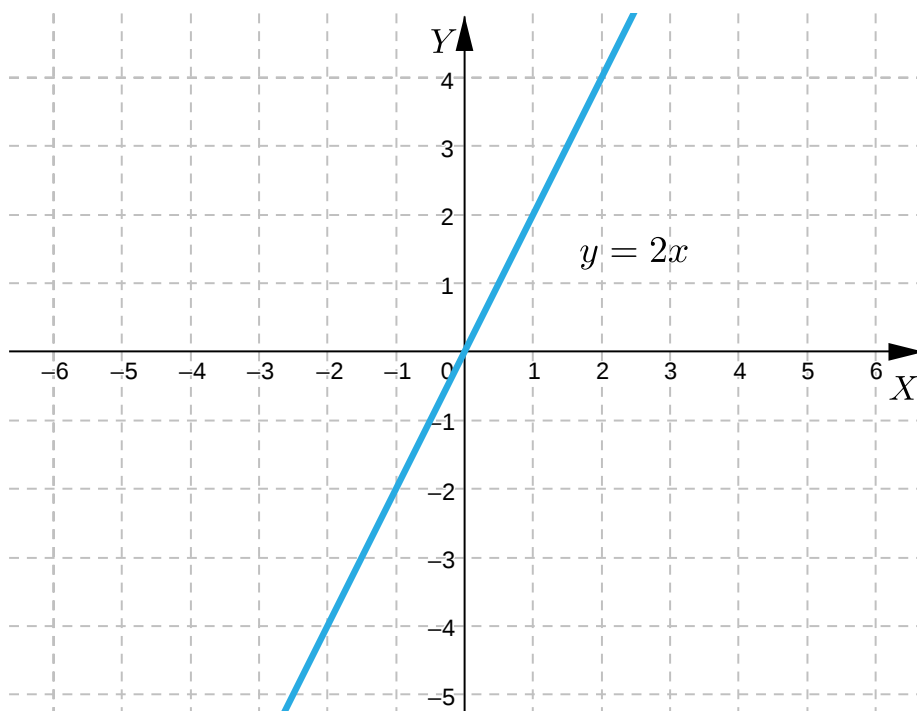
1. Rysujemy wykres funkcji $y = 2x$.

Wartość funkcji dla argumentu 0 to

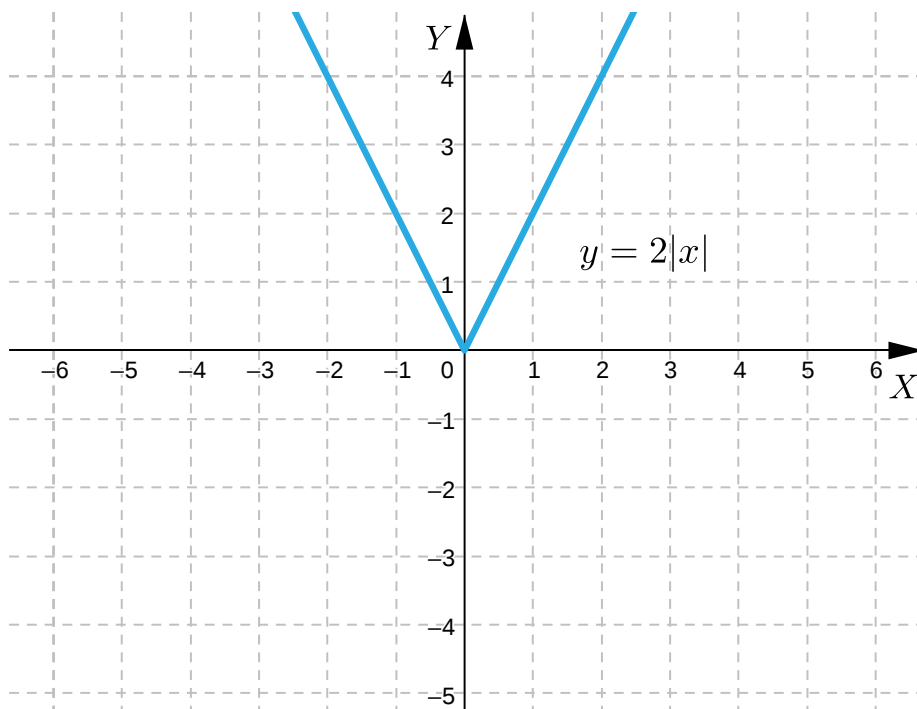
$$y = 2 \cdot 0 = 0$$

Wartość funkcji dla argumentu 1 to

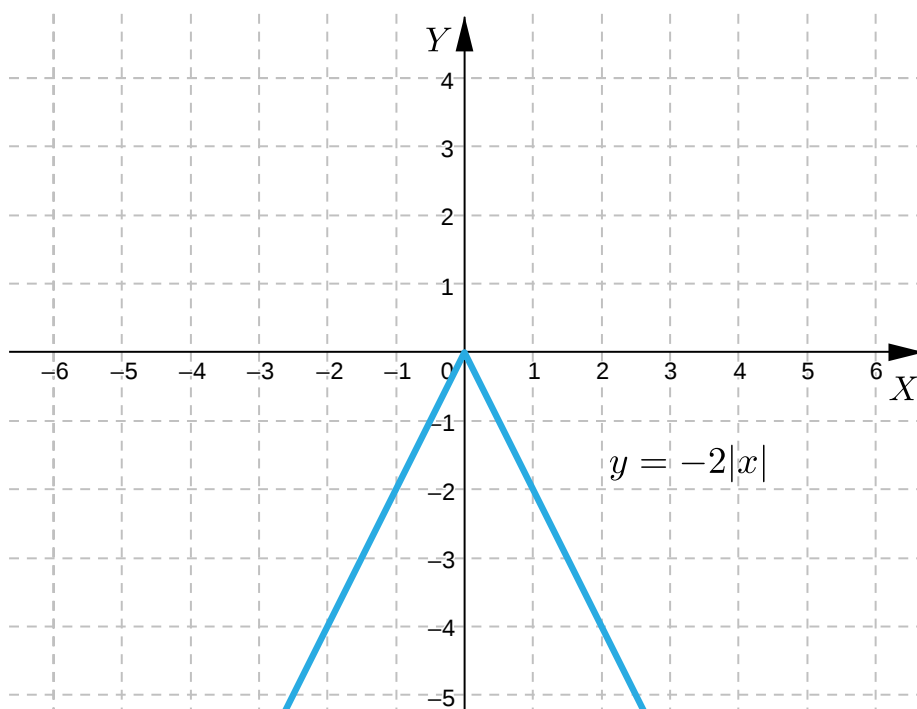
$$y(1) = 2 \cdot 1 = 2$$



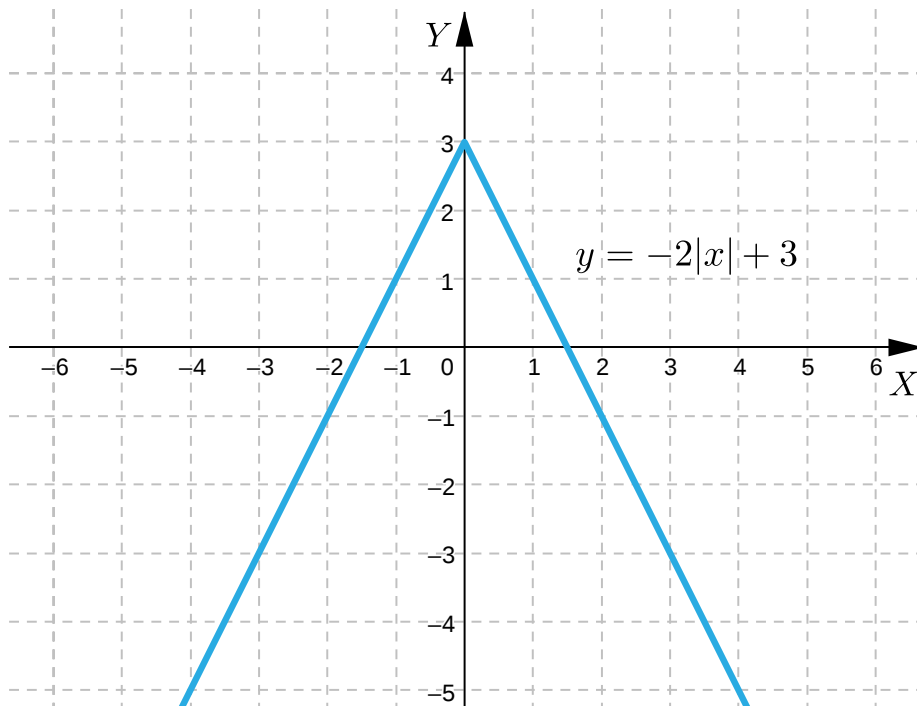
2. Rysujemy wykres funkcji $y = 2|x|$. Część wykresu dla $x < 0$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi Y te części wykresu funkcji $y = 2x$, dla których $x \geq 0$.



3. Rysujemy wykres funkcji $y = -2|x|$. Odbijamy symetrycznie względem osi X wykres funkcji $y = 2|x|$.

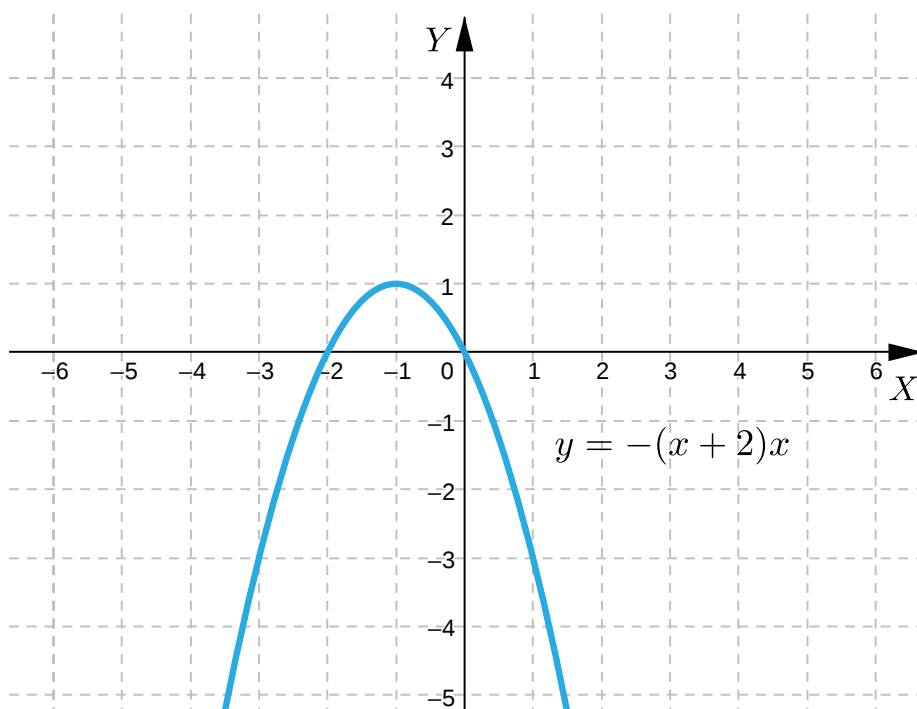


4. Rysujemy wykres funkcji $y = -2|x| + 3$. Przesuwamy wykres funkcji $y = -|x|$ względem osi Y o 3 jednostki w górę.



Przykład 3

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = -(x + 2)x$

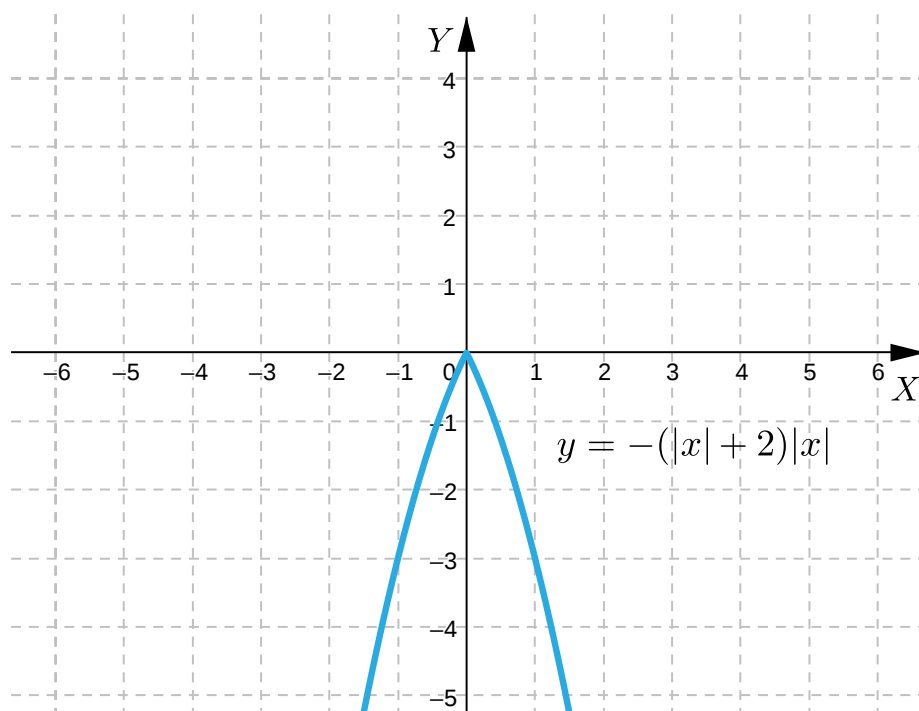


narysuj wykres funkcji $y = -f(|x|) - 1$, a następnie odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

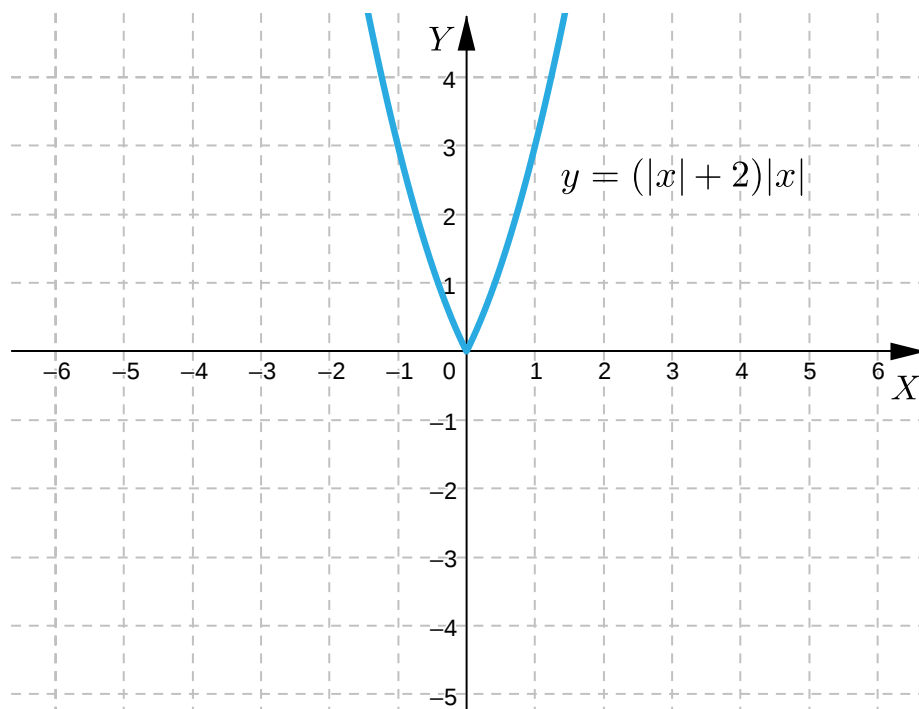
Rozwiązanie:

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji $y = -(|x| + 2)|x|$, $y = -(-(|x| + 2)|x|)$,
 $y = (|x| + 2)|x| - 1$.

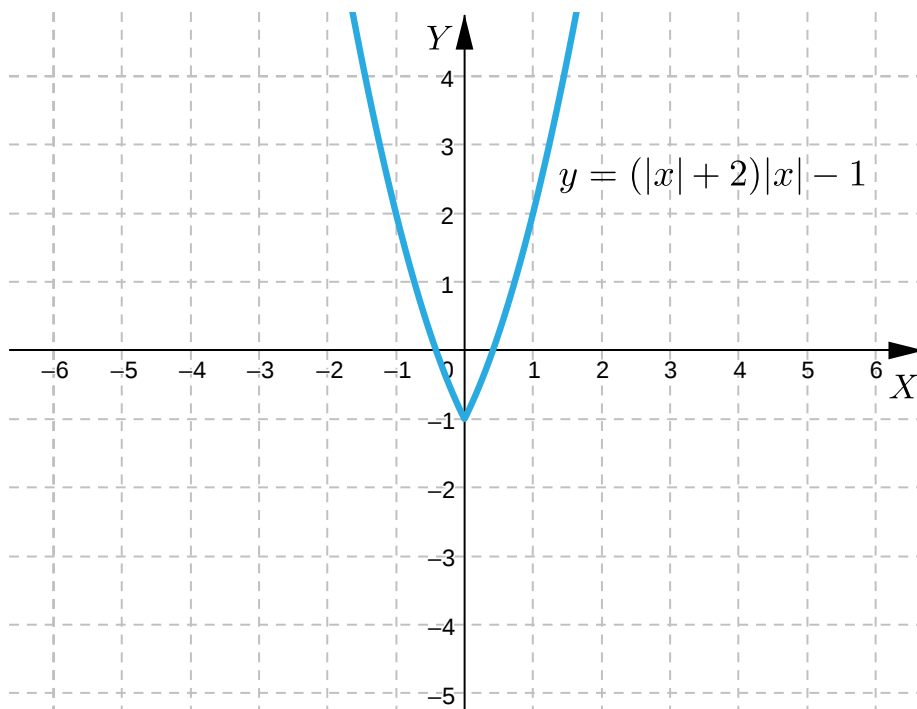
1. Rysujemy wykres funkcji $y = -(|x| + 2)|x|$. Część wykresu dla $x < 0$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi Y te części wykresu funkcji $y = -(x + 2)x$, dla których $x \geq 0$.



2. Rysujemy wykres funkcji $y = -(-(|x| + 2)|x|) = (|x| + 2)|x|$. Odbijamy symetrycznie względem osi X wykres funkcji $y = -(|x| + 2)|x|$.



3. Rysujemy wykres funkcji $y = (|x| + 2)|x| - 1$. Przesuwamy wykres funkcji $y = (|x| + 2)|x|$ względem osi Y o 1 jednostkę w dół.

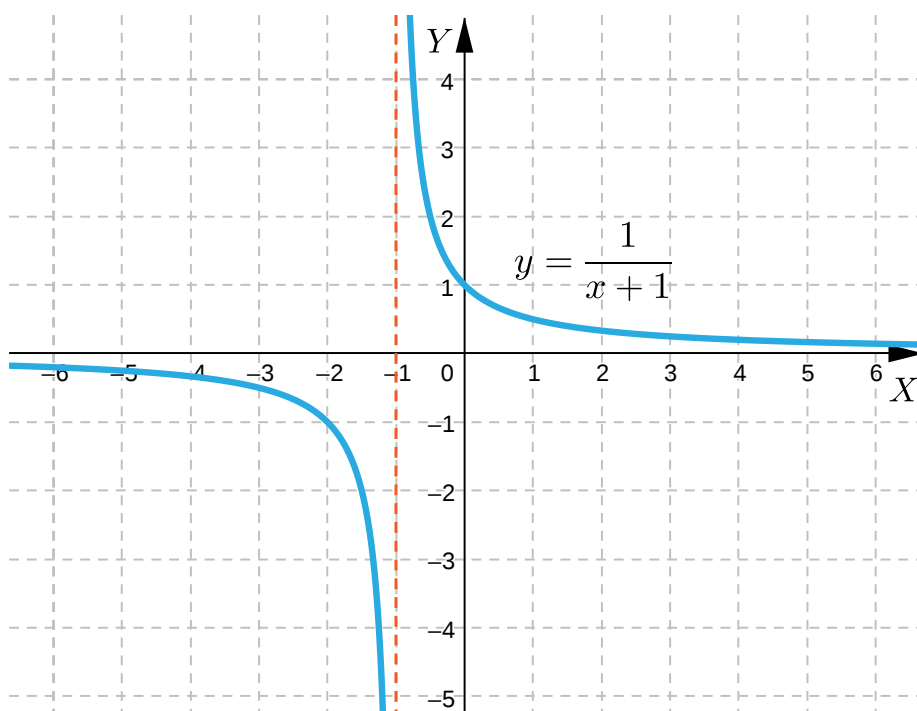


Odczytujemy z wykresu:

- **dziedzina:** $D = \mathbb{R}$,
- **zbiór wartości funkcji:** $ZW = \langle -1, \infty \rangle$.

Przykład 4

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$

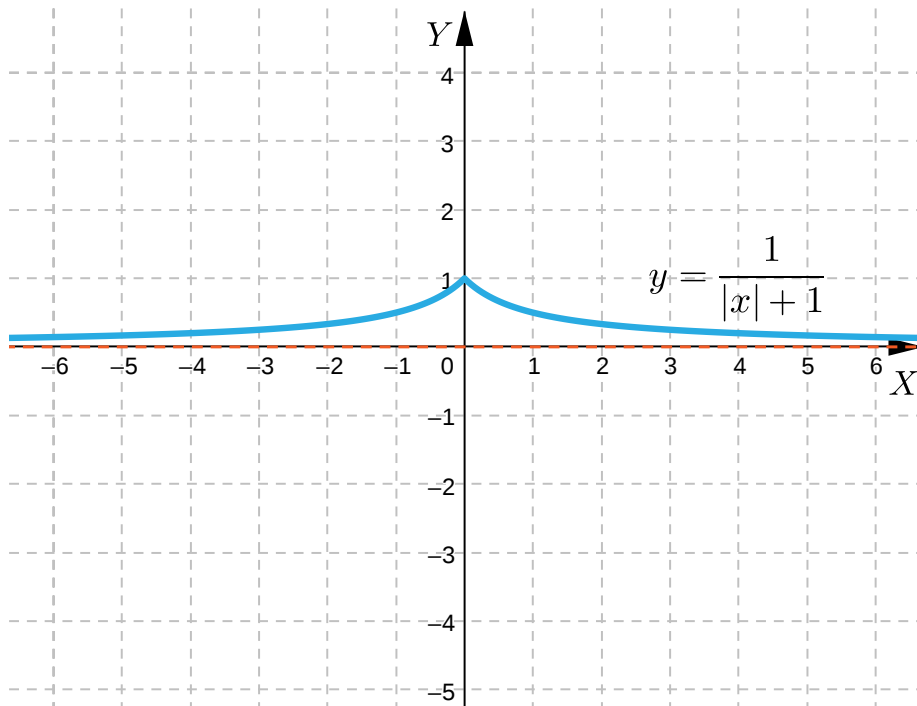


narysuj wykres funkcji $y = -f(|x|) + 1$, a następnie odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

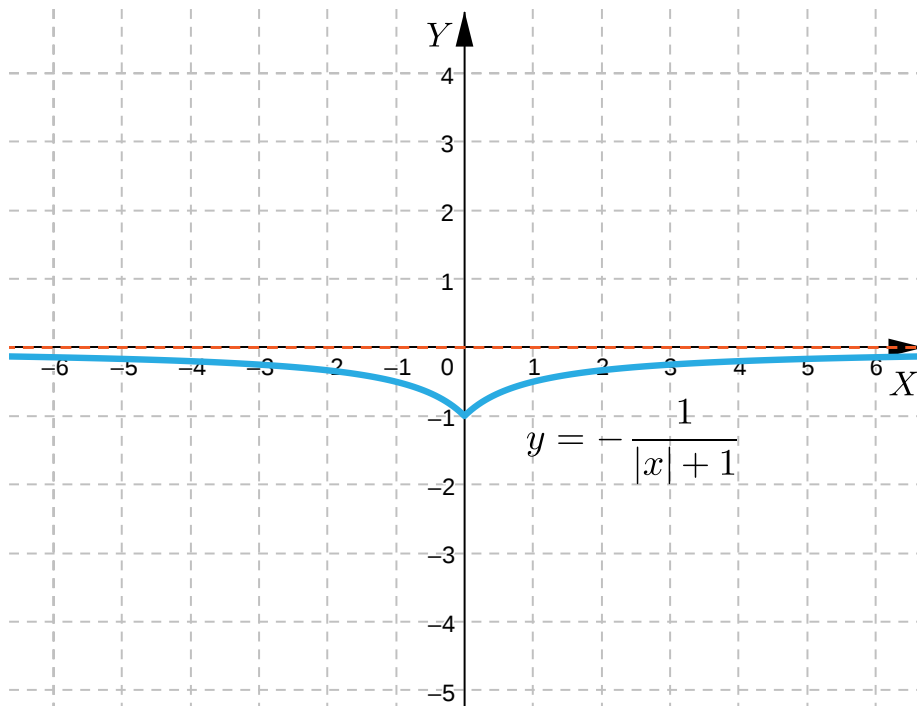
Rozwiązanie:

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji $y = \frac{1}{|x|+1}$, $y = -\frac{1}{|x|+1}$, $y = -\frac{1}{|x|+1} + 1$.

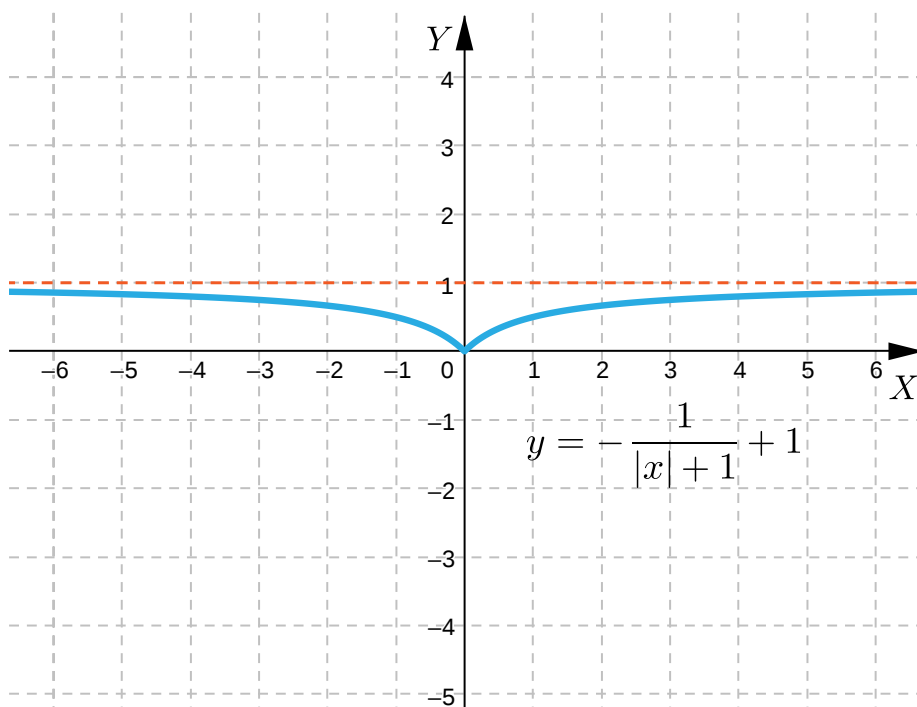
1. Rysujemy wykres funkcji $y = \frac{1}{|x|+1}$. Część wykresu dla $x < 0$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi Y części wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$, dla których $x \geq 0$.



2. Rysujemy wykres funkcji $y = -\frac{1}{|x|+1}$. Odbijamy symetrycznie względem osi X wykres funkcji $y = \frac{1}{|x|+1}$.



3. Rysujemy wykres funkcji $y = -\frac{1}{|x|+1} + 1$. Przesuwamy wykres funkcji $y = -\frac{1}{|x|+1}$ względem osi Y o 1 jednostkę w górę.



Odczytujemy z wykresu:

- **dziedzina:** $D = \mathbb{R}$,
- **zbiór wartości funkcji:** $ZW = \langle 0, 1 \rangle$.

dziedzina funkcji

dziedzina funkcji liczbowej określonej wzorem w postaci wyrażenia algebraicznego – zbiór wszystkich liczb, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy

zbiór wartości funkcji liczbowej

zbiór wszystkich liczb, które może przybierać zmienna zależna y danej funkcji $f(x)$

Animacja

Polecenie 1

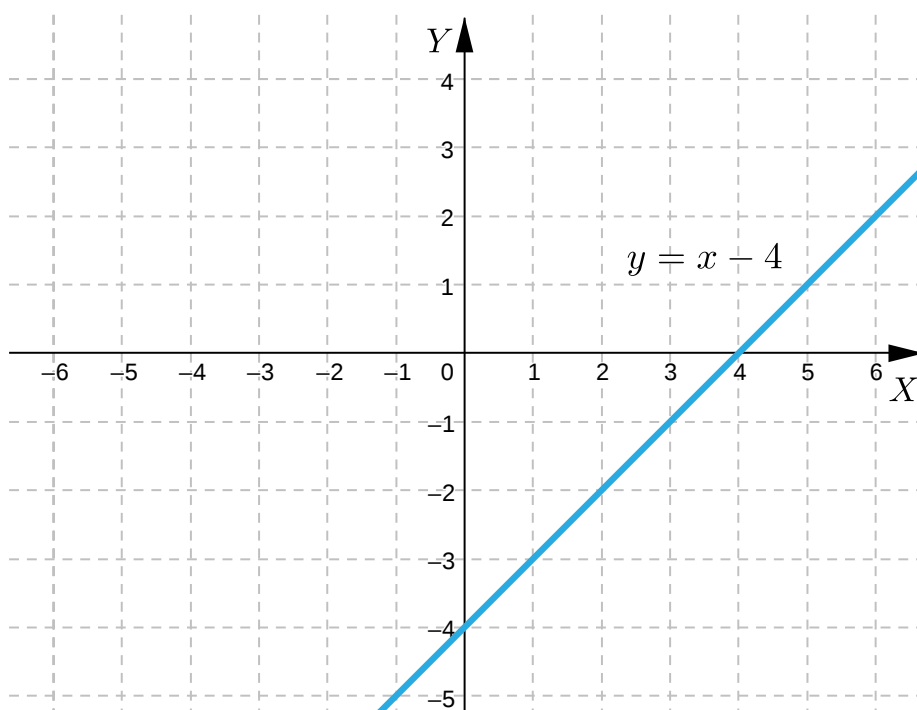
Zapoznaj się z animacją prezentującą, jak narysować wykres funkcji $y = -|f(x)| + b$ na podstawie wykresu funkcji $f(x)$. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DhoPQWuRr>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej przekształcenia wykresu funkcji.

Polecenie 2

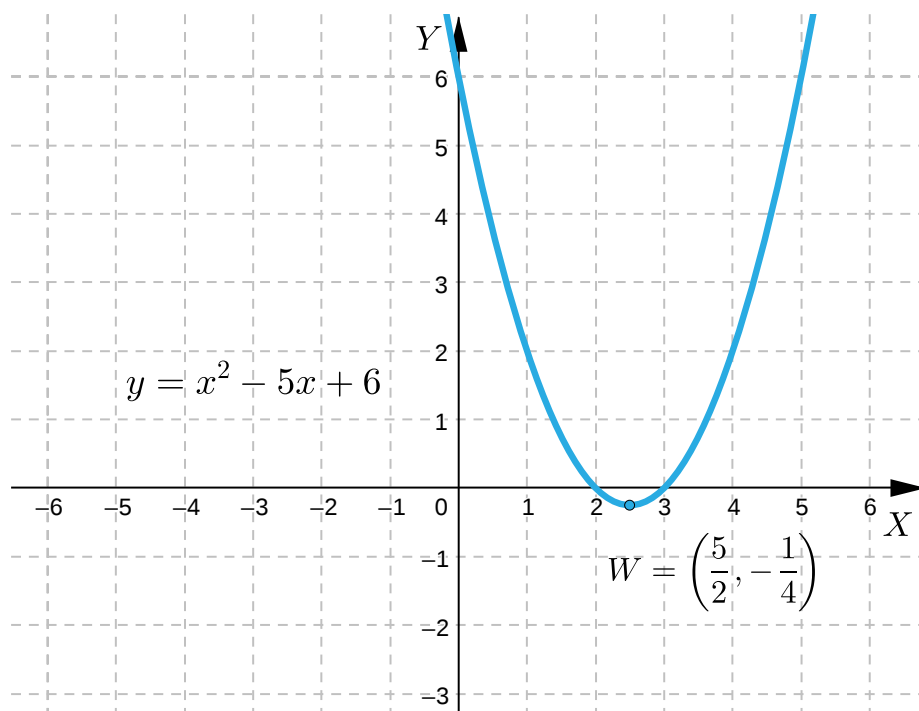
Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = x - 4$



narysuj wykres funkcji $y = -f(|x|) - 2$.

Polecenie 3

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$



narysuj wykres funkcji $y = -f(|x|) + 3$, a następnie odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

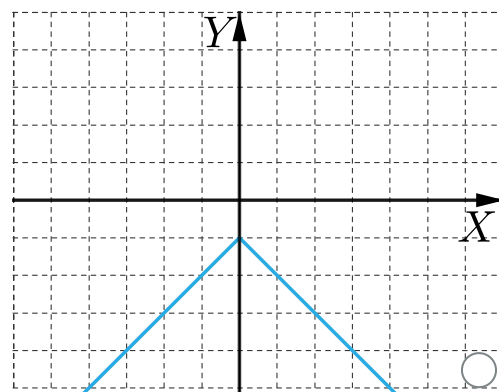
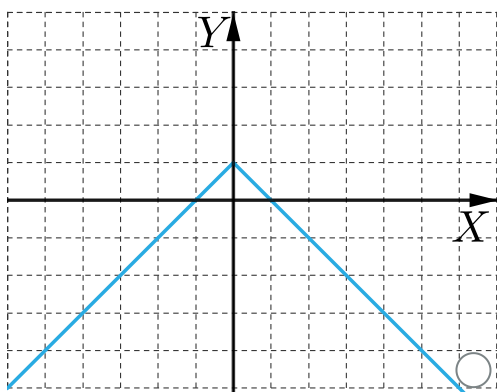
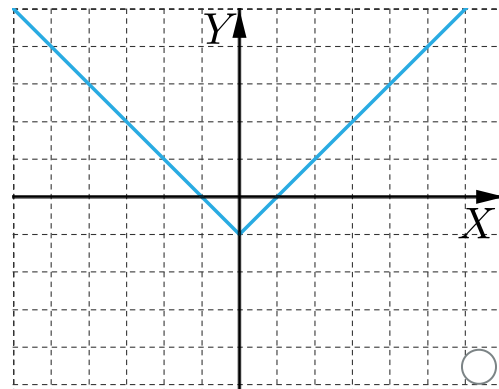
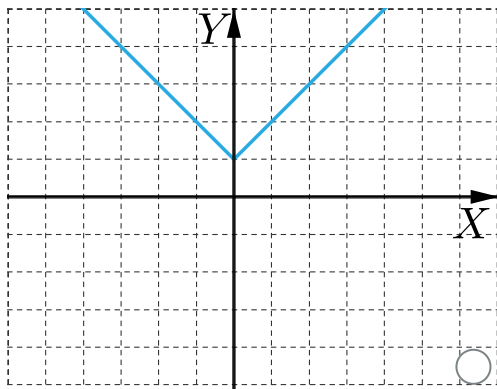
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wybierz rysunek , na którym przedstawiono wykres funkcji $y = -|x| - 1$ (przyjmij, że jedna jednostka to jedna kratka).



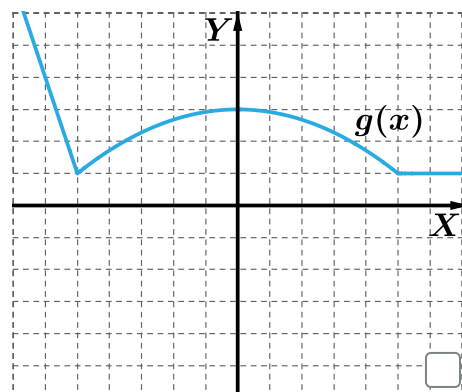
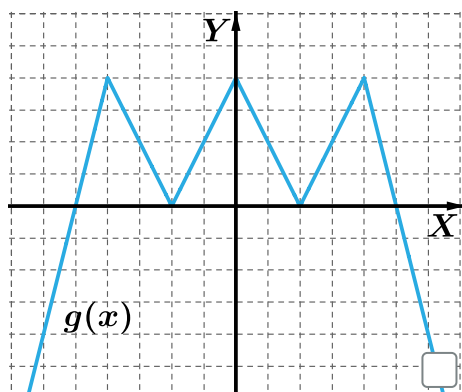
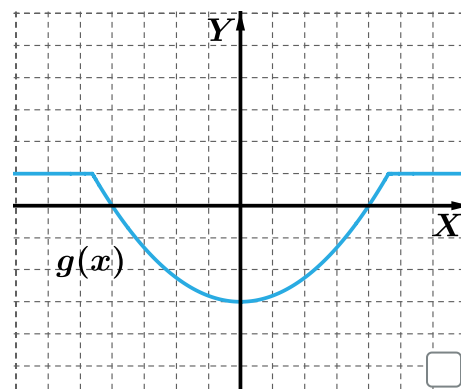
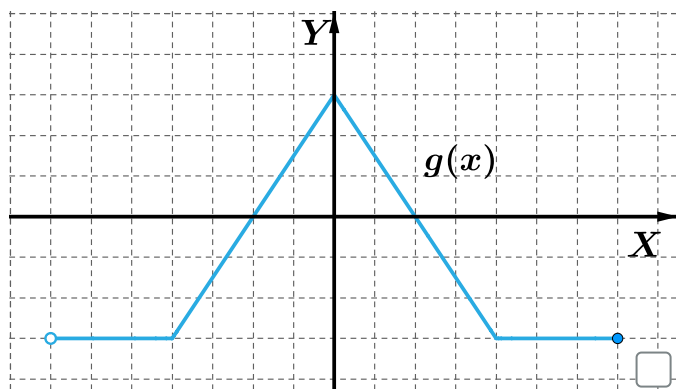
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



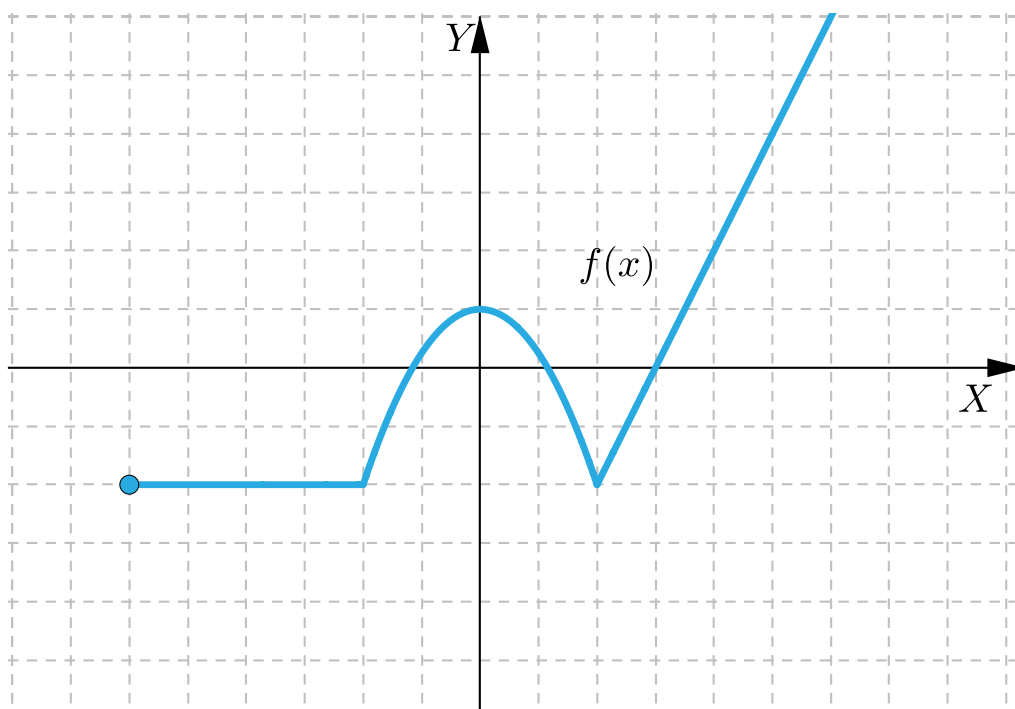
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $g(x)$. Wybierz wszystkie wykresy, dla których istnieje funkcja $f(x)$ taka, że $g(x) = -f(|x|) + 3$ (przyjmij, że jedna jednostka to jedna kratka).



Ćwiczenie 4



Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x)$ (przyjmij, że jedna jednostka to jedna kratka). Uzupełnij puste miejsca w tekście, wstawiając w nie odpowiednie liczby całkowite.



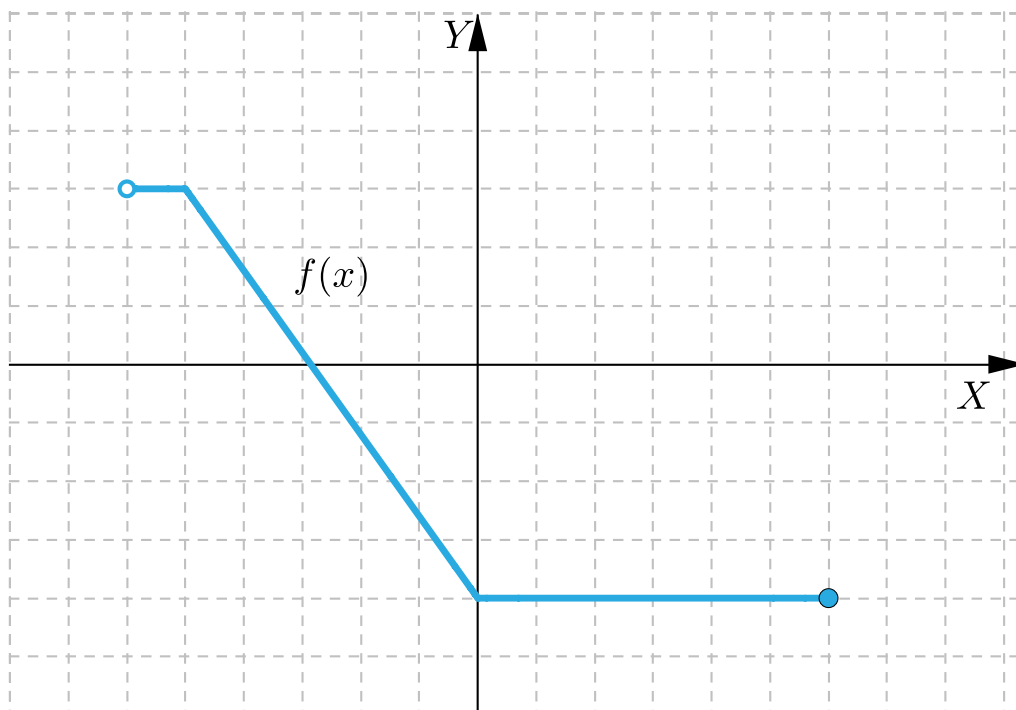
Wpisz w luki prawidłowe liczby.

1. Miejscami zerowymi funkcji $y = -f(|x|) + 2$ są liczby ; .
2. Zbiorem wartości funkcji $y = -f(|x|) + 2$ jest przedział $(-\infty; \text{})$.
3. Funkcja $y = -f(|x|) + 2$ rośnie między innymi w przedziale $(-\infty; \text{})$.

Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x)$ (przyjmij, że jedna jednostka to jedna kratka). Funkcja $y = -f(|x|) - 1$ przecina oś Y w punkcie:



☐ (0; 4)

☐ (0; 3)

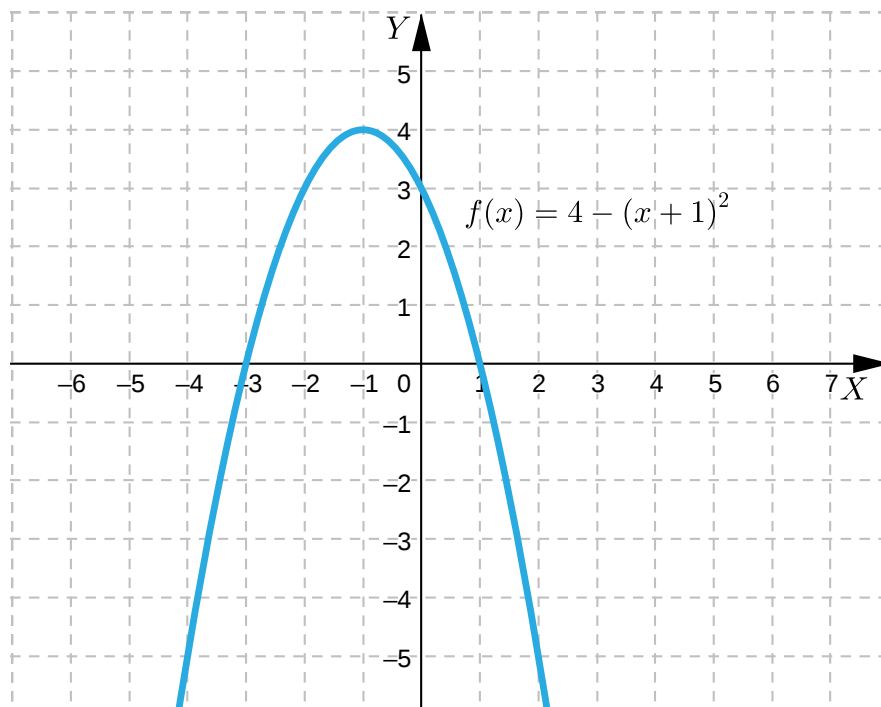
☐ nie przecina osi Y

☐ (0; -3)

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja $f(x) = 4 - (x + 1)^2$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = -f(|x|) - 5$, a następnie zaznacz zdania prawdziwe.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Funkcja $g(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; -8)$.

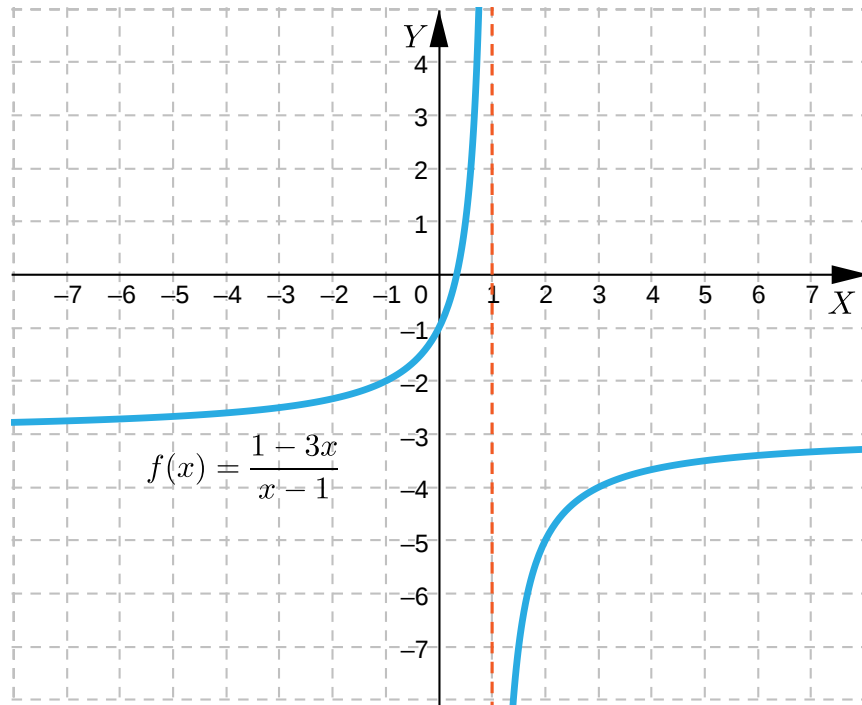
☐ Ośią symetrii wykresu funkcji $g(x)$ jest prosta o równaniu $x = 1$.

☐ Miejscami zerowymi funkcji $g(x)$ są liczby $x \in \{-2; 2\}$.

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1-3x}{x-1}$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = -f(|x|) - 2$, a następnie zaznacz zdanie prawdziwe.



Zaznacz zdanie prawdziwe.

☐ Funkcja $g(x)$ maleje tylko w przedziale $(\frac{1}{3}; 1)$.

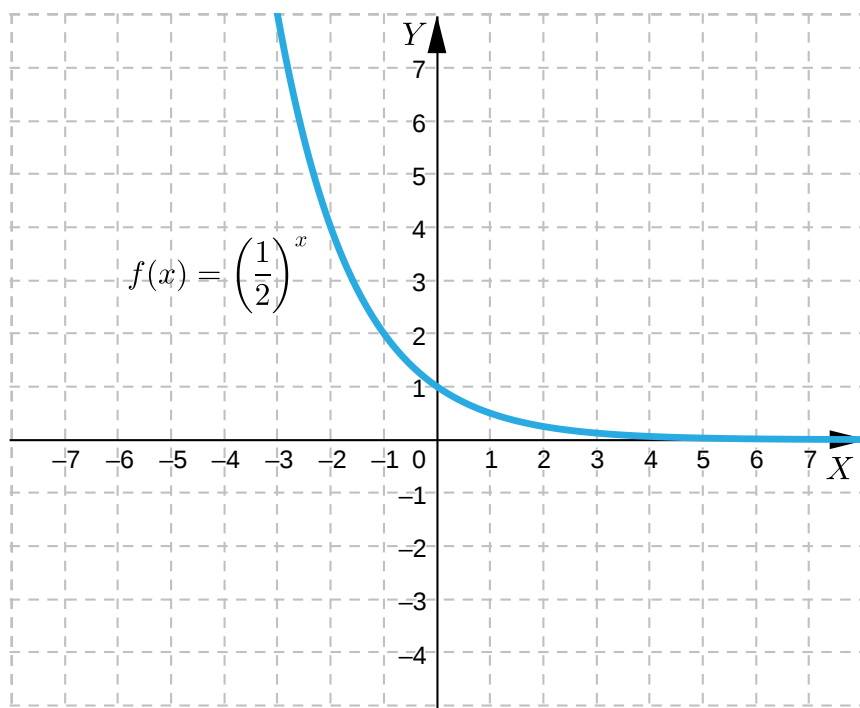
☐ Funkcja $g(x)$ jest malejąca.

☐ Funkcja $g(x)$ ma dwa miejsca zerowe.

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-4}$, a następnie zaznacz zdania prawdziwe.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Zbiorem wartości funkcji $g(x)$ jest przedział $\langle 0; 1 \rangle$.
- ☐ Funkcja $g(x)$ rośnie tylko w przedziale $\langle 4, \infty \rangle$.
- ☐ Miejscami zerowymi funkcji $g(x)$ są liczby $x \in \{-4; 4\}$.
- ☐ Funkcja $g(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; 1)$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresów funkcji opisanych wzorami typu $y = -f(|x|) + b$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Zakres rozszerzony 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala kolejne kroki rysowania wykresu funkcji $y = -f(|x|) + b$;
- na podstawie wykresu funkcji $f(x)$ sporządza wykres funkcji $y = -f(|x|) + b$;
- określa związek między przekształceniem wykresu funkcji a wzorem funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia;
- odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości;

- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- analiza przypadku;
- objaśnianie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- uczniowie przypominają definicję funkcji oraz sposoby przedstawiania funkcji;
- uczniowie przypominają definicję wartości bezwzględnej;
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel dzieli uczniów na 3 – osobowe grupy;
- każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji PRZECZYTAJ oraz przygotowanie przykładu funkcji i narysowanie jej wykresu;
- uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji PRZECZYTAJ;
- uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem, następnie samodzielnie rozwiązują zadania zamieszczone pod animacją;
- uczniowie w grupach przygotowują przykład funkcji i rysują jej wykres;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

- wybrani uczniowie prezentują wykresy zaproponowanych przez grupę funkcji;

- uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień;
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria osiowa – wprowadzenie](#)
- [Symetria osiowa](#)
- [Definicja i sposoby przedstawiania funkcji](#)
- [Sposoby opisywania funkcji](#)
- [Symetria wykresu funkcji](#)
- [Symetria punktu](#)
- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Wartość bezwzględna liczby](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiały zawarte w animacji i w sekcji PRZECZYTAJ uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją; umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.
- „Animację” można również wykorzystać w realizacji lekcji dotyczącej rysowania wykresów funkcji z wartością bezwzględną.