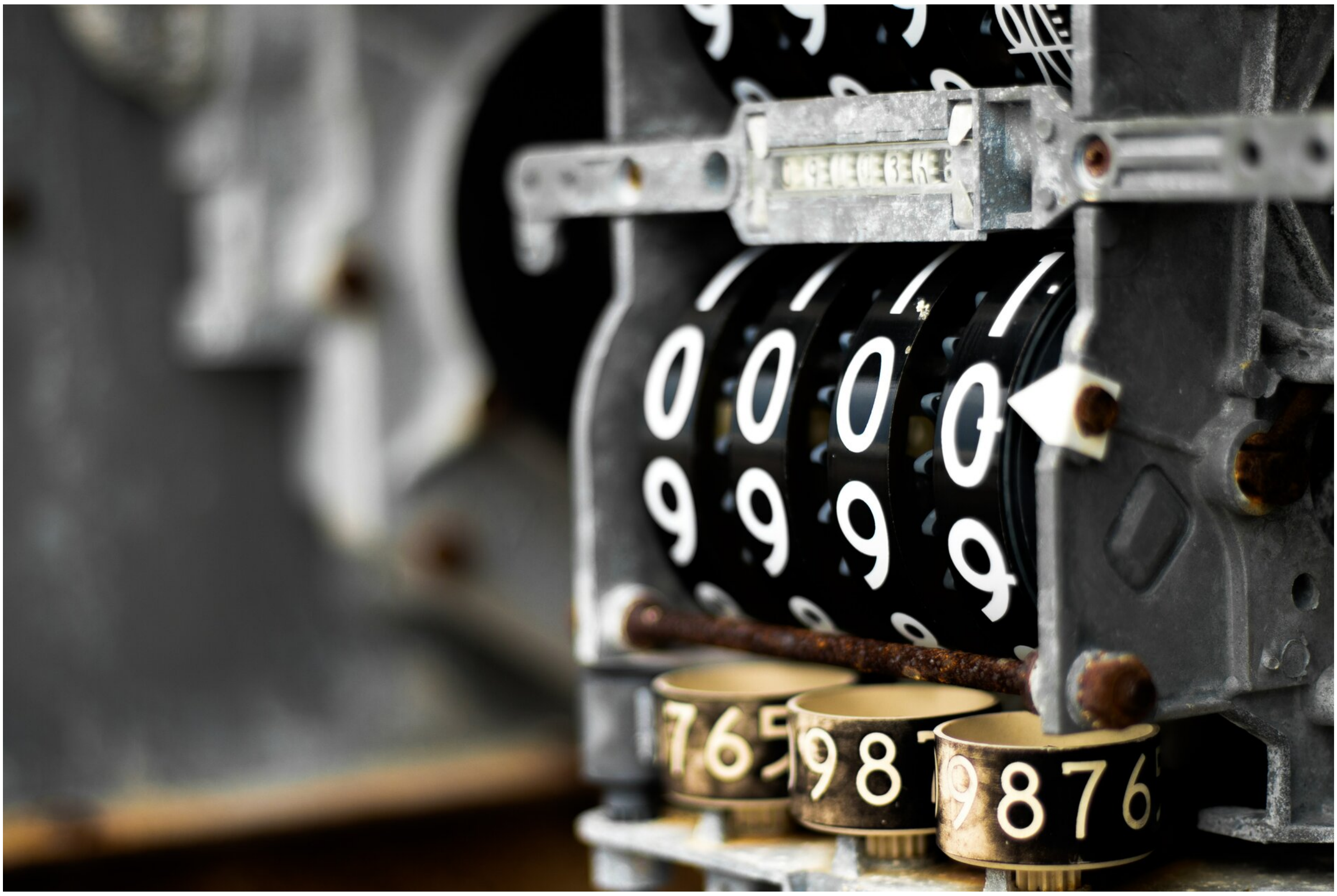

Liczby całkowite i działania na nich

Liczby całkowite i działania na nich

Źródło: Logan Kirschner, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Mimo że dziś naszego zdziwienia nie budzi prognoza pogody, w której mówi się o ujemnej temperaturze (czyli mrozach), ani nie przeraża nadto niewielki (!) dług (czyli ujemny stan finansów) na karcie debetowej, to ludzkość przez wiele stuleci rozwoju matematyki borykała się z liczbami ujemnymi nazywając je “absurdalnymi”.

Pierwsze wzmianki sugerujące potrzebę rozważania liczb oznaczających deficyt pojawiają się już w I wieku p.n.e. w Chinach. Później w VII wieku n.e. Indyjczycy używali liczb ujemnych do księgowania długów – podobnie jak później (XIII wiek) czynił to Fibonacci. Ale i tak większość europejskich matematyków odrzucała koncepcję liczb ujemnych aż do XVIII wieku.

Możemy zaryzykować więc stwierdzenie, że przeciętny absolwent dzisiejszej szkoły podstawowej wie o liczbach ujemnych więcej, niż całe rzesze matematyków na przestrzeni setek lat.

Twoje cele

- Odróżnisz liczbę całkowitą od niecałkowitej.
- Wykonasz podstawowe działania na liczbach całkowitych.
- Zastosujesz własności działań na liczbach całkowitych do obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych.
- Zastosujesz działania na liczbach całkowitych do rozwiązywania zadań praktycznych.

Przeczytaj

Definicja: Liczby całkowite

Przypomnijmy najpierw, że zbiór liczb naturalnych to

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots,\ 100,\ 101,\ \ldots\}$$

Zbiór liczb całkowitych definiujemy jako sumę zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb przeciwnych do liczb naturalnych.

Innymi słowy liczba jest całkowita, jeśli jest liczbą naturalną lub liczbą przeciwną do naturalnej.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbb{Z}$ – symbol pochodzi od niemieckiego słowa Zahl oznaczającego liczbę.

Zatem:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -101, -100, \ldots, -10, -9, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 9, 10, \ldots, 100, 101, \ldots\}$$

Działania na liczbach całkowitych

Wiemy już, że suma i iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Możemy powiedzieć, że działania dodawania i mnożenia nie wyprowadzają poza zbiór liczb naturalnych albo inaczej, że zbiór liczb naturalnych to zbiór zamknięty na dodawanie i mnożenie. Ponieważ różnica liczb naturalnych może być liczbą ujemną (a więc nie liczbą naturalną), powiemy, że odejmowanie wyprowadza poza zbiór liczb naturalnych.

Zauważmy, że suma, różnica i iloczyn liczb całkowitych są liczbami całkowitymi, więc możemy powiedzieć, że dodawanie, odejmowanie i mnożenie nie wyprowadza poza zbiór liczb całkowitych albo, że zbiór liczb całkowitych jest zamknięty na te działania.

Dzielenie wyprowadza poza zbiór liczb całkowitych, ponieważ wynik dzielenia liczb całkowitych może nie być liczbą całkowitą.

W zbiorze liczb całkowitych wykonujemy dzielenie z resztą.

> **Ważne!**
>
> Przypomnijmy, że:
>
> - iloczyn dowolnie wielu liczb dodatnich jest liczbą dodatnią,
> - iloczyn parzyście wielu liczb ujemnych jest liczbą dodatnią,
> - iloczyn nieparzyście wielu liczb ujemnych jest liczbą ujemną,
> - iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną,

Prawa działań na liczbach całkowitych

Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c:

$a + b = b + a$	przemienność dodawania
$(a + b) + c = a + (b + c)$	łączność dodawania
$a \cdot b = b \cdot a$	przemienność mnożenia
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	łączność mnożenia
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	rozdzielność mnożenia względem dodawania
$a + 0 = a$	0 jest elementem neutralnym dodawania
$a \cdot 1 = a$	1 jest elementem neutralnym mnożenia
$a + (-a) = 0$	istnienie liczby przeciwnej do każdej liczby całkowitej
$a - b = a + (-b)$	wykonalność odejmowania

Ponadto dla dowolnych liczb całkowitych zachodzi:

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

$$(-a) \cdot b = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$-(-a) = a$$

Zilustrujemy powyższe własności na przykładach.

Przykład 1

Obliczymy:

$$(-3) + (-4) = -(3 + 4) = -7$$

$$(-7) + 4 = -(7 - 4) = -3$$

$$(-3) + 8 = 8 - 3 = 5$$

$$(-3) + 3 = 0$$

$$(-3) \cdot (-4) = 12$$

$$(-3) \cdot 2 = -6$$

$$-(-4) = 4$$

$$6 - (-2) = 6 + 2 = 8$$

Przykład 2

Obliczymy:

$$3 \cdot (-2) + (-3) - (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -6 + (-3) - (-24) =$$

$$= -6 + (-3) + 24 = -(6 + 3) + 24 = -9 + 24 = 15$$

Przykład 3

Zastosujemy prawa łączności i przemienności dodawania:

$$494 + 495 + 496 + 497 + 498 + 499 + 500+$$

$$+501 + 502 + 503 + 504 + 505 + 506 =$$

$$= (494 + 506) + (495 + 505) + (496 + 504) + (497 + 503)+$$

$$+(498 + 502) + (499 + 501) + 500 =$$

$$= 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 500 =$$

$$= 6 \cdot 1000 + 500 = 6500$$

Przykład 4

Zastosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$16 \cdot 8 - 16 \cdot 3 = 16 \cdot (8 - 3) = 16 \cdot 5 = (10 + 6) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 50 + 30 = 8$$

Przykład 5

Zwróć uwagę na kolejność wykonywania działań:

$$4 \cdot 6 : 3 - 2 + 20 : 5 \cdot 2 = 24 : 3 - 2 + 4 \cdot 2 = 8 - 2 + 8 = 6 + 8 = 14$$

Przykład 6

Zwróć uwagę na kolejność wykonywania działań:

$$\{4 \cdot 7 - [(4 \cdot 3 + 8 : 4) - (2 \cdot 6 - 10)] \cdot 5\} + 3 \cdot (4 \cdot 7 - 26) =$$

$$= \{28 - [(12 + 2) - (12 - 10)] \cdot 5\} + 3 \cdot (28 - 26) =$$

$$= \{28 - [14 - 2] \cdot 5\} + 3 \cdot 2 =$$

$$= \{28 - 12 \cdot 5\} + 6 =$$

$$= \{28 - 60\} + 6 =$$

$$= -32 + 6 =$$

$$= -(32 - 6) =$$

$$= -26$$

Przykład 7

Wyznaczymy wszystkie całkowite liczby k, dla których $\frac{k-2}{k+2}$ jest liczbą całkowitą.

Zauważmy, że

$$\frac{k-2}{k+2}=\frac{k+2-4}{k+2}=\frac{k+2}{k+2}-\frac{4}{k+2}=1-\frac{4}{k+2}$$

Zatem $\frac{k-2}{k+2}$ będzie liczbą całkowitą, dokładnie wtedy, gdy $\frac{4}{k+2}$ będzie liczbą całkowitą.

Czyli $k+2$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 4, zatem jest jedną spośród liczb $\{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4\}$.

Stąd k jest jedną spośród liczb $\{-1,\ -3,\ 0,\ -4,\ 2,\ -6\}$.

Słownik

przemienność dodawania liczb całkowitych

własność dodawania oznaczająca, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b zachodzi równość $a+b=b+a$

przemienność mnożenia liczb całkowitych

własność mnożenia oznaczająca, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b zachodzi równość $a\cdot b=b\cdot a$

łączność dodawania liczb całkowitych

własność dodawania oznaczająca, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c zachodzi równość $(a+b)+c=a+(b+c)$

łączność mnożenia liczb całkowitych

własność mnożenia oznaczająca, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c zachodzi równość $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

rozdzielność mnożenia względem dodawania

własność działań oznaczająca, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c zachodzi równość $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

zbiór zamknięty (ze względu) na działanie

mówimy, że zbiór jest zamknięty (ze względu) na działanie $\star$, gdy dla dowolnych elementów a, b tego zbioru, wynik działania $a \star b$ również należy do tego zbioru

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje i przykłady zawarte w animacji, a następnie rozwiąż test.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dsn2zQ8oQ

Film nawiązujący do treści materiału.

Polecenie 2

Na podstawie informacji zawartych w animacji rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Suma $1+3+5+...+53+55+57$ jest równa:

- 812 ☐
- 841 ☐
- 870 ☐

Wartość ułamka $\frac{2m+3}{m+1}$ jest liczbą całkowitą dla m równego:

- -2 ☐
- -1 ☐
- 0 ☐

Liczbami spełniającymi równanie $x^2-9=0$ są:

- 3 ☐
- -3 ☐
- 0 ☐

Liczbą spełniającą równanie $\left(x^2+4\right)\left(x^2-16\right)=0$ jest:

- 2 ☐
- -2 ☐
- -4 ☐

Parami liczb spełniającymi równanie $\left(x^2+1\right)\cdot y=2$ są:

- $x=0$ i $y=2$ ☐
- $x=1$ i $y=1$ ☐
- $x=-1$ i $y=1$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Połącz w pary wyrażenia, które mają taką samą wartość.

$-10 \cdot (-3)$	$10 \cdot 3$
$-10 - (-3)$	$10 - 3$
$10 - (-3)$	$-10 + 3$
$10 + (-3)$	$10 \cdot (-3)$
$-10 + (-3)$	$10 + 3$
$-10 \cdot 3$	$-10 - 3$

Ćwiczenie 2

Oblicz. Uzupełnij komórki tabeli, przenosząc w puste miejsca odpowiednie z podanych liczb.

Oblicz	Wynik
$(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4$	
$(-1) + (-2) + (-3) + (-4)$	
$(-6) \cdot 5 \cdot (-7) \cdot 0$	
$(-54) - 16 - (-70)$	
$24 - 30 + 6 - 45 + 15$	
$128 + 129 + 130 + 170 + 171 + 172$	
$(-2) \cdot [-3 - (-13)] \cdot 5$	
$[5 - (-5)] \cdot [-10 - 5]$	

0 -30 -100 900 24 -150 0 -10

Ćwiczenie 3

Wykonaj działania:

$$[4 \cdot (3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) + 25 \cdot 36] : (36 \cdot 12 - 290 - 2 \cdot 4)$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj działania:

$$[(8 \cdot 15 + 7 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 85 - 4 \cdot 62) - 479] : (5 \cdot 71 - 55)$$

Ćwiczenie 5

Wykonaj działania:

$$\{408 \cdot 306 - 18 \cdot [(204 \cdot 9 - 93 \cdot 7) : 79 - 1]\} : 3461$$

Ćwiczenie 6

Postaw nawiasy tak, aby zachodziły równości.

a) $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2 = 58$

b) $3248 : 16 - 3 \cdot 315 - 156 \cdot 2 = 600$

c) $350 - 15 \cdot 104 - 1428 : 14 = 320$

Ćwiczenie 7

Rozwiąż test. Przy każdym punkcie zaznacz poprawną odpowiedź.

1. Wykonując działania $15 + 19 + 11 = 15 + 30 = 45$, korzystamy z prawa:
   - Przemienności dodawania. ☐
   - Łączności dodawania. ☐
2. Wykonując działania $(10 + 8) \cdot 12 = 10 \cdot 12 + 8 \cdot 12$, korzystamy z prawa:
   - Rozdzielności mnożenia względem dodawania. ☐
   - Rozdzielności dodawania względem mnożenia. ☐
3. Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty na:
   - Odejmowanie. ☐
   - Dzielenie. ☐

Ćwiczenie 8

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Cyfra 1 jest elementem neutralnym mnożenia.
- ☐ Nie istnieje liczba przeciwna do zera.
- ☐ Liczbą przeciwną do zera jest zero.
- ☐ Cyfra 0 jest elementem neutralnym mnożenia.
- ☐ Cyfra 0 jest elementem neutralnym dodawania.

Ćwiczenie 9

Suma czterech liczb jest równa 42. Jeżeli pierwszą z nich powiększymy o 2, drugą zmniejszymy o 2, trzecią powiększymy o $50\ \%$, zaś czwartą pomniejszymy o $50\ \%$, to otrzymane liczby będą równe. Co to za liczby? Wpisz rozwiązanie w poniższe pole i porównaj wynik z podanym poniżej rozwiązaniem.

Ćwiczenie 10

Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli napiszemy cyfry w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby. Jaka to liczba? Wpisz rozwiązanie w poniższe pole i porównaj wynik z podanym poniżej rozwiązaniem.

Ćwiczenie 11

Wyznacz wszystkie całkowite wartości k, dla których $\frac{k+2}{k-1}$ jest liczbą całkowitą. Wpisz rozwiązanie w poniższe pole i porównaj wynik z podanym poniżej rozwiązaniem.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczby całkowite i działania na nich

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odróżnia liczbę całkowitą od niecałkowitej,
- wykonuje podstawowe działania na liczbach całkowitych,
- stosuje własności działań na liczbach całkowitych do obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych,
- stosuje działania na liczbach całkowitych do rozwiązywania zadań praktycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują polecenia związane z medium w sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- Działania na liczbach całkowitych

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Liczby całkowite i działania na nich”.