



Wykorzystanie trygonometrii w obliczeniach dotyczących graniastosłupów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie trygonometrii w obliczeniach dotyczących graniastosłupów

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Masz już szeroką wiedzę dotyczącą graniastosłupów. W tym materiale utrwalisz ją i nauczysz się stosować trygonometrię w zadaniach dotyczących graniastosłupów. Wykażesz się znajomością rodzajów graniastosłupów, rozpoznawaniem odcinków, kątów i przekrojów w graniastosłupie, a także umiejętnością zastosowania wzorów na pola wielokątów, objętość i pole powierzchni graniastosłupa oraz znajomością podstawowych zależności trygonometrycznych. Jeżeli obawiasz się, że twoja wiedza jest niewystarczająca, przypomnij sobie podstawowe pojęcia – z pomocą przyjdzie ci również słowniczek, który znajduje się w każdym materiale.

Twoje cele

- Zaznaczysz kąty i odcinki w graniastosłupach.
- Obliczysz pole powierzchni i objętość graniastosłupa ze wzoru.
- Wykorzystasz własności kątów, odcinków i wielokątów do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupa.
- Wykorzystasz funkcje trygonometryczne do obliczania długości odcinków i miar kątów.
- Wykonasz rysunek przedstawiający bryłę omówioną w zadaniu.

Przeczytaj

Podstawami każdego graniastopu są równoległe, przystające wielokąty znajdujące się w różnych płaszczyznach, a jego ściany boczne są prostokątami lub równoległobokami. Wielokątami są również przekroje graniastopu. Są to figury geometryczne, w których z łatwością można zastosować funkcje trygonometryczne. Najczęściej będziemy korzystać z funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkątach prostokątnych.

Warto przypomnieć również dwa twierdzenia geometrii wykorzystujące funkcje trygonometryczne.

Twierdzenie: Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

gdzie:

a, b, c – są bokami trójkąta,

α – kąt trójkąta, który znajduje się na przeciwko boku a .

Twierdzenie: Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

gdzie:

a, b, c – są bokami trójkąta,

α, β, γ – są kątami, które znajdują się na przeciwko boków a, b, c odpowiednio,

R – jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przypomnijmy ponadto, że funkcje trygonometryczne są wykorzystywane we wzorach na pola wielokątów.

Pole trójkąta

$$P = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2},$$

gdzie:

a, b – są bokami trójkąta,

α – kąt między tymi bokami.

Pole równoległoboku

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha,$$

gdzie:

a, b – są sąsiednimi bokami równoległoboku,

α – kąt między nimi.

$$P = \frac{p \cdot q \cdot \sin \gamma}{2},$$

gdzie:

p, q – są przekątnymi równoległoboku,

γ – kąt między nimi.

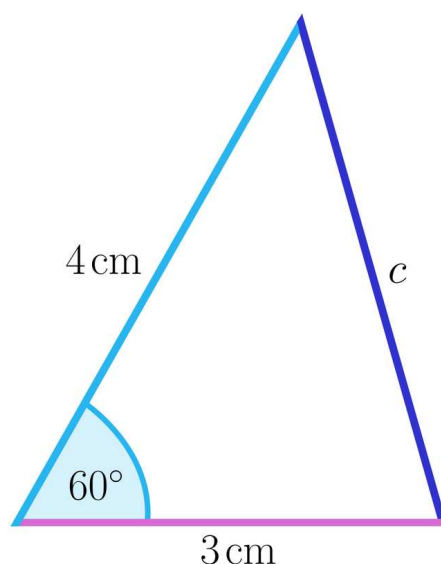
Funkcje trygonometryczne kątów w podstawie i na ścianie bocznej

Przykład 1

W podstawie graniastosłupa prostego jest trójkąt o bokach 3 cm i 4 cm i kącie o mierze 60° między nimi. Krawędź boczna ma długość 6 cm. Obliczmy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Narysujmy podstawę tego graniastosłupa.



Możemy policzyć pole podstawy

$$P_p = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Do obliczenia pola powierzchni bocznej brakuje długości krawędzi oznaczonej przez c .

Wykorzystamy twierdzenie cosinusów

$$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\text{czyli } c^2 = 25 - 24 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ostatecznie } c = \sqrt{13} \text{ cm.}$$

Teraz możemy już obliczyć pole powierzchni bocznej

$$P_b = 6 \cdot (4 + 3 + \sqrt{13}) = 42 + 6\sqrt{13} \text{ cm}^2.$$

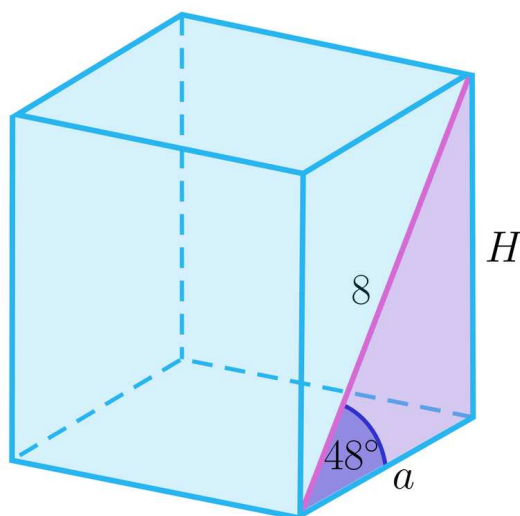
$$\text{A zatem } P_c = 6\sqrt{3} + 42 + 6\sqrt{13} = 6 \cdot (7 + \sqrt{3} + \sqrt{13}) \text{ cm}^2.$$

Przykład 2

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i tworzy kąt 48° z krawędzią podstawy. Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Zróbmy rysunek pomocniczy.



Zaznaczony trójkąt jest prostokątny. Obliczamy długość krawędzi podstawy i wysokości z funkcji trygonometrycznych

$$\cos 48^\circ = \frac{a}{8} \text{ oraz } \sin 48^\circ = \frac{H}{8}.$$

Odczytujemy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych

$$0,6691 = \frac{a}{8} \text{ oraz } 0,7431 = \frac{H}{8},$$

$$\text{czyli } a \approx 5,35 \text{ cm oraz } H \approx 5,94 \text{ cm.}$$

Możemy już obliczyć objętość $V = 5,35^2 \cdot 5,94 \approx 170,02 \text{ cm}^3$.

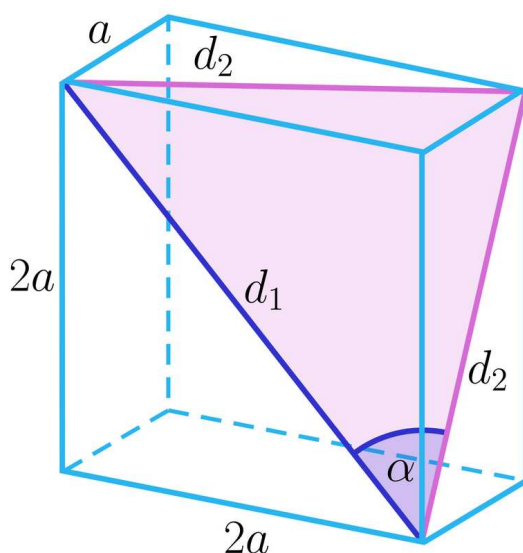
Funkcje trygonometryczne kątów między odcinkami w graniastostłupie

Przykład 3

W prostopadłościanie jedna z krawędzi podstawy jest dwukrotnie dłuższa od drugiej. Wysokość prostopadłościanu jest równa dłuższej krawędzi podstawy. Obliczmy miarę kąta pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.

Rozwiązanie

Narysujmy prostopadłościan i zaznaczmy na nim dane i szukany kąt.



Przekątna podstawy i przekątna mniejszej ściany bocznej mają tę samą długość.

Możemy ją policzyć z twierdzenia Pitagorasa

$$(2a)^2 + a^2 = d_2^2. \text{ Czyli } d_2 = a\sqrt{5}.$$

Przekątna większej ściany bocznej jest przekątną kwadratu, tak więc $d_1 = 2a\sqrt{2}$.

Skorzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta zaznaczonego na rysunku

$$5a^2 = 8a^2 + 5a^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Wtedy } 8a^2 = 4a^2\sqrt{10} \cdot \cos \alpha, \text{ czyli } \cos \alpha = \frac{8}{4\sqrt{10}} \approx 0,6324.$$

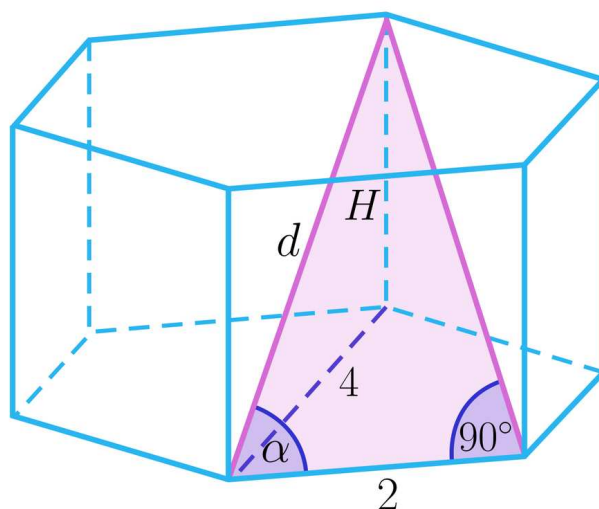
A stąd $\alpha \approx 51^\circ$.

Przykład 4

Dłuższa przekątna graniastostupa prawidłowego sześciokątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt, którego cosinus wynosi $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Krawędź podstawy ma długość 2. Obliczmy długość wysokości tego graniastostupa.

Rozwiązanie

Zróbmy rysunek pomocniczy.



Zauważmy najpierw, że trójkąt, którego bokami są dłuższa i krótsza przekątna graniastostupa prawidłowego sześciokątnego jest prostokątny.

Dłuższa przekątna bryły ma długość $\sqrt{4a^2 + H^2}$, a krótsza $\sqrt{3a^2 + H^2}$, co wynika z twierdzenia Pitagorasa.

Zauważmy, że $a^2 + \left(\sqrt{3a^2 + H^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4a^2 + H^2}\right)^2$, co z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa oznacza, że jest to trójkąt prostokątny.

Mamy zatem $\cos \alpha = \frac{2}{d}$, a stąd $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{d}$, czyli $d = 2\sqrt{5}$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$H^2 + 4^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2,$$

czyli $H^2 = 4$ i ostatecznie $H = 2$.

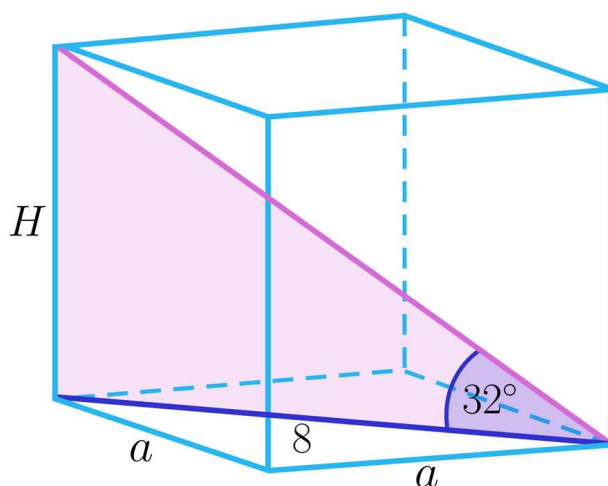
**Funkcje trygonometryczne kąta między odcinkiem,
a płaszczyzną w graniastostupie**

Przykład 5

W podstawie graniastosłupa prostego znajduje się romb o przekątnych długości 6 i 8. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 32° . Obliczmy sumę długości krawędzi tego graniastosłupa. Wynik podamy w przybliżeniu do 0,01.

Rozwiązanie

Zróbmy rysunek pomocniczy.



Dłuższa przekątna graniastosłupa, dłuższa przekątna podstawy i krawędź boczna tworzą trójkąt prostokątny.

Obliczamy długość krawędzi bocznej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym: $\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{H}{8}$.

Stąd otrzymujemy $0,6249 = \frac{H}{8}$ i ostatecznie $H \approx 5$.

Obliczamy długość krawędzi podstawy z twierdzenia Pitagorasa

$$3^2 + 4^2 = a^2, \text{ a stąd } a = 5.$$

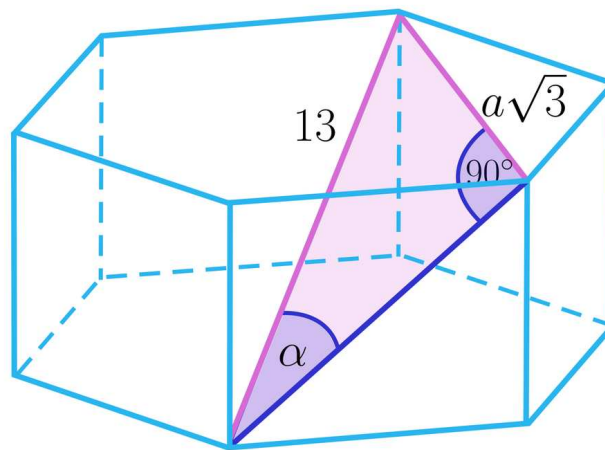
A zatem suma wszystkich krawędzi wynosi $12 \cdot 5 = 60$.

Przykład 6

Sinus kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do ściany bocznej wynosi $\frac{6\sqrt{3}}{13}$. Długość tej przekątnej wynosi 13. Obliczmy objętość graniastosłupa.

Rozwiązanie

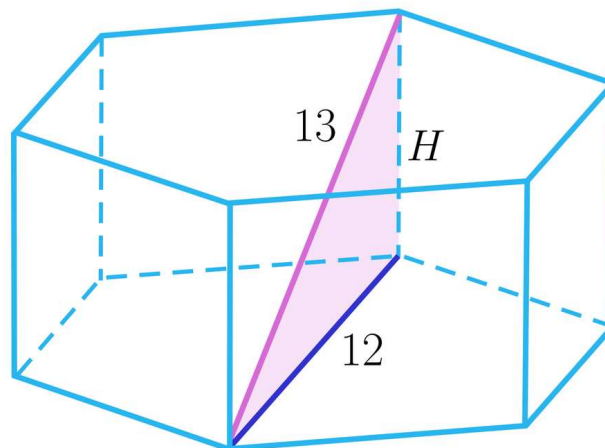
Zróbmy rysunek pomocniczy.



W zaznaczonym trójkącie prostokątnym obliczamy długość boku $a\sqrt{3}$, korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym: $\sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{13}$.

Zatem $\frac{6\sqrt{3}}{13} = \frac{a\sqrt{3}}{13}$, a stąd krawędź podstawy $a = 6$.

Obliczmy teraz **wysokość** graniastosłupa.



Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$H^2 + 12^2 = 13^2. \text{ Stąd } H = 5.$$

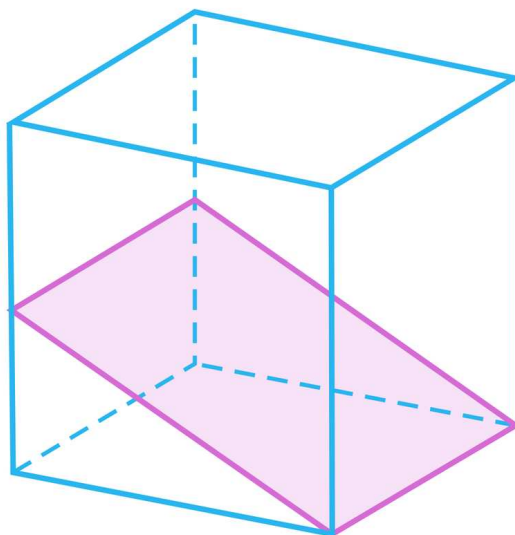
Wyznaczamy objętość tego graniastosłupa

$$V = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = 270\sqrt{3}.$$

Funkcje trygonometryczne kątów między płaszczyznami

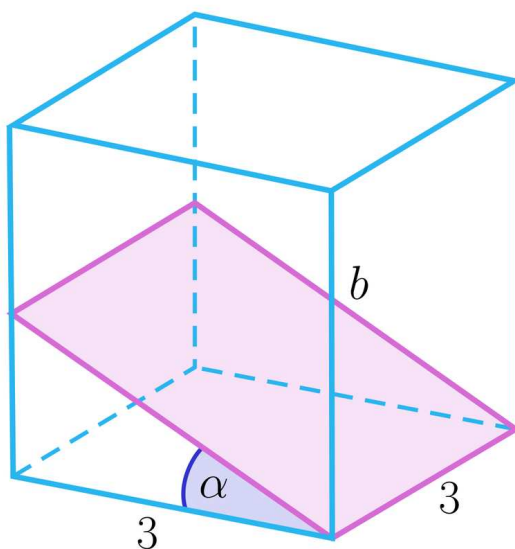
Przykład 7

Oblicz pole przekroju sześcianu przedstawionego na rysunku, wiedząc, że cosinus kąta nachylenia przekroju do podstawy wynosi $\frac{10}{11}$, a krawędź sześcianu ma długość 3.



Kąt nachylenia przekroju do podstawy będzie kątem pomiędzy dłuższym bokiem prostokąta, a krawędzią podstawy.

Oznaczmy go na rysunku przez α .



Mamy więc $\cos \alpha = \frac{10}{11}$, a stąd $\frac{3}{b} = \frac{10}{11}$.

Ostatecznie $b = 3,3$.

Przekrój jest prostokątem o wymiarach $3 \times 3,3$, więc jego pole wynosi

$$P = 3 \cdot 3,3 = 9,9.$$

Ważne!

1. Przypomnijmy, że kąty pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi w **graniastosłupie prostym** mają miarę taką, jak kąty w podstawie tego graniastosłupa.

2. Wróćmy do Przykładu 1:

W podstawie graniastosłupa prostego jest trójkąt o bokach 3 cm i 4 cm i kącie o mierze 60° między nimi. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli wiemy, że krawędź boczna ma długość 6 cm.

Zadanie to mogłoby być sformułowane w sposób następujący:

Kąt pomiędzy dwiema ścianami bocznymi graniastosłupa prostego trójkątnego ma miarę 60° . Krawędzie podstawy, na których zbudowane są te ściany, mają długość 3 cm i 4 cm. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli krawędź boczna ma długość 6 cm.

Słownik

graniastosłup prosty

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami

graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, w którego podstawie jest wielokąt foremny

prostopadłościan

graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami

wysokość graniastosłupa

odcinek, którego długość jest równa odległości między płaszczyznami podstaw graniastosłupa i którego końce należą do rozłącznych płaszczyzn podstaw

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D, a następnie wykonaj polecenia pod nią.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1EygGWNW>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wykorzystania trygonometrii w obliczeniach dotyczących graniastosłupów.

Polecenie 2

Na podstawie animacji 3D wyznacz wzór na objętość graniastosłupa pochyłego o podstawie trójkąta równobocznego o krawędzi podstawy a , jeżeli krawędź boczna ma długość b i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α .

Polecenie 3

Odpowiedz na pytania dotyczące graniastosłupa o podstawie rombu, który pojawia się w animacji 3D:

- a) Ile wynosi cosinus kąta pomiędzy przekątną graniastosłupa, a krawędzią boczną?
- b) Ile wynosi cosinus kąta pomiędzy przekątną graniastosłupa, a krawędzią podstawy?

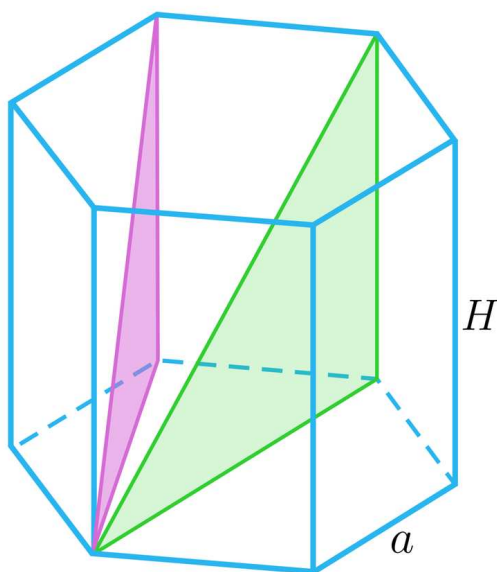
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Graniastosłup na rysunku jest prawidłowy. Jego krawędź podstawy ma długość a , a wysokość wynosi H .



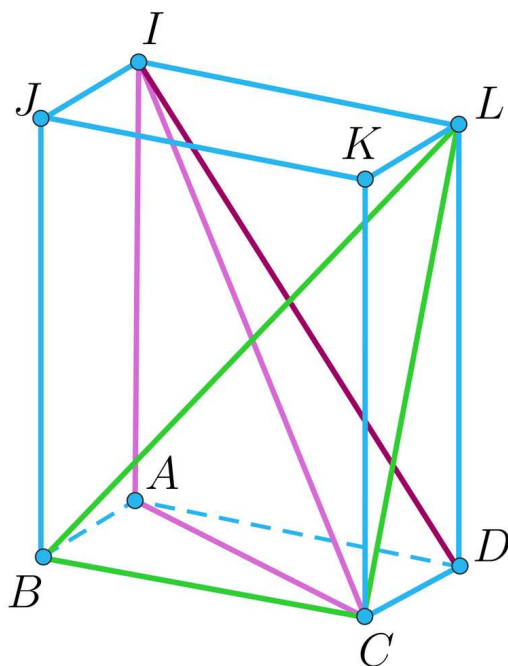
Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ☐ Tangens kąta pomiędzy dłuższą przekątną graniastosłupa, a krawędzią boczną wynosi $\frac{H}{2a}$.
- ☐ Tangens kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do podstawy wynosi $\frac{H\sqrt{3}}{3a}$.
- ☐ Tangens kąta pomiędzy dłuższą przekątną graniastosłupa, a krawędzią podstawy wynosi $\frac{H}{2a}$.
- ☐ Tangens kąta pomiędzy dłuższą przekątną graniastosłupa, a krawędzią boczną wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{H}$.

Ćwiczenie 2



Graniastosłup $ABCDIJKL$ jest prostopadłościanem.



Uzupełnij zdania przeciągając odpowiedzi w poprawne miejsca.

1. Sinus kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu, a krawędzią podstawy jest równy cosinusowi .
2. Tangens $\angle AID$ jest równy tangensowi .
3. Sinus kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do podstawy jest równy cosinusowi .
4. Cosinus $\angle BLD$ jest równy sinusowi .
5. Sinus $\angle BIC$ jest równy cosinusowi .
6. Tangens $\angle BAJ$ jest równy tangensowi .

kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu, a krawędzią podstawy

$\angle BLC$

kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do podstawy

$\angle KLC$

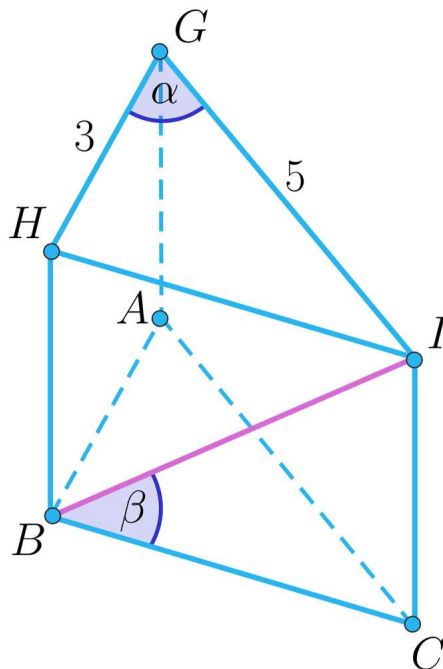
kąta, jaki przekątna graniastosłupa tworzy z krawędzią boczną

$\angle JCK$

Ćwiczenie 3



Graniastół na rysunku jest prosty. Wiemy, że $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, a długość wysokości graniastółu wynosi 4.



Oznacza to, że (wybierz wszystkie prawidłowe odpowiedzi):

☐ podstawy są trójkątami prostokątnymi i kąt prosty jest w wierzchołkach B i H

☐ $\sin(\angle BCA) = \frac{3}{5}$

☐ ściana $BCIH$ jest kwadratem

☐ tangens kąta jaki przekątna ściany $BCIH$ tworzy z płaszczyzną podstawy wynosi 1

☐ tangens kąta jaki przekątna ściany $BCIH$ tworzy z krawędzią podstawy wynosi 1

☐ ściana $ABHG$ jest kwadratem.

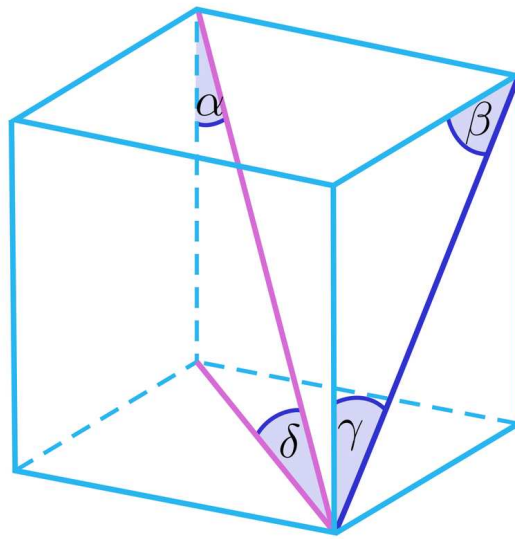
☐ podstawy są trójkątami prostokątnymi i kąt prosty jest w wierzchołkach A i G

☐ $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 4



Graniastosłup na rysunku jest sześcianem.



Dla którego kąta cosinus ma najmniejszą wartość? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ β

☐ δ

☐ α

☐ γ

Zaznacz poprawną odpowiedź. Taką samą miarę mają kąty:

☐ Wszystkie zaznaczone kąty

☐ Tylko α i β

☐ α , β i γ

☐ Tylko γ i β

Zaznacz poprawną odpowiedź. Ile wynosi sinus kąta α ?

☐ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

☐ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 5

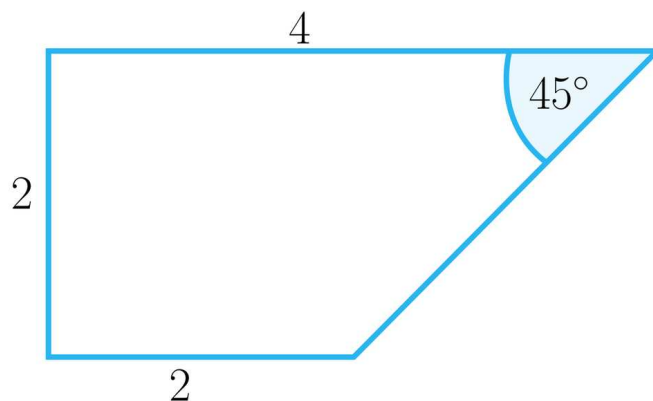


Kąt nachylenia dłuższej przekątnej graniastopu prawidłowego sześciokątnego do podstawy wynosi 30° , a długość krawędzi bocznej jest równa 4. Oblicz miarę kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastopu do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 6



Podstawą graniastopu prostego jest trapez prostokątny jak na rysunku.



Oblicz pole powierzchni tego graniastopu, jeżeli sinus kąta pomiędzy przekątnymi najmniejszych ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka wynosi $\frac{1}{6}$.

Ćwiczenie 7

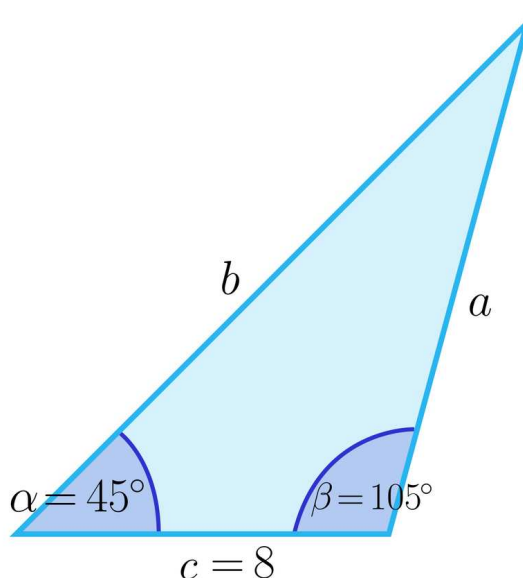


Stosunek długości krawędzi podstawy do krawędzi bocznej graniastopu prawidłowego czworokątnego wynosi $2 : 3$. Oblicz kąt nachylenia przekroju, którego bokami są przekątne dwóch sąsiednich ścian bocznych wychodzących z jednego wierzchołka do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 8



Podstawą graniastopu prostego jest trójkąt jak na rysunku.



Oblicz wysokość tego graniastopu, jeżeli objętość wynosi 64. Przyjmij $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie trygonometrii w zadaniach dotyczących graniastosłupów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześciianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przedstawia graficznie opisane graniastosłupy

- rozpoznaje kąty w graniastosłupach
- rozpoznaje odcinki w graniastosłupach
- oblicza objętość i pole powierzchni graniastosłupów z zastosowaniem twierdzeń dotyczących trójkątów
- analizuje treść zadania pod kątem doboru strategii rozwiązywania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja

Formy pracy:

- praca całą klasą
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- modele brył

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Przed lekcją nauczyciel wybiera zadania zamknięte z poprzednich tematów z e-podręcznika, które pomogą uczniom przypomnieć sobie podstawowe pojęcia.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel organizuje quiz z zadań zamkniętych z sekcji Sprawdź się poprzednich tematów e-podręcznika.
2. Uczniowie rozwiązują w parach quiz przygotowany przez nauczyciela.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom przykładowe zadania z sekcji „Przeczytaj” dotyczące zastosowania trygonometrii w graniastosłupach.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 6 grup. Każda z grup opracowuje zamknięte zadania z sekcji „Sprawdź się” dotyczące trygonometrii w graniastosłupach.
3. Przedstawiciele grup przedstawiają swoje propozycje rozwiązań.

4. Nauczyciel wraz z uczniami prowadzi dyskusję na temat rozwiązań.
5. Nauczyciel przedstawia uczniom animację 3D dotyczącą zastosowania graniastosłupów.
6. Uczniowie samodzielnie rozwiązują wybrane przez nauczyciela polecenia z sekcji „Animacja 3D” i zadania zawarte w sekcji „Sprawdź się”.
7. Nauczyciel monitoruje pracę uczniów, udziela im wskazówek.
8. Nauczyciel prezentuje poprawne rozwiązania.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wraz z nauczycielem podsumowują sposoby wykorzystania trygonometrii w zadaniach dotyczących graniastosłupów.
2. Nauczyciel dokonuje ewaluacji lekcji metodą kosza i walizki.

Praca domowa:

1. Zapoznać się ponownie z animacją 3D.
2. Wykonać pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)
- [Pole powierzchni graniastosłupa](#)
- [Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa](#)

Wskazówki metodyczne:

Jako wprowadzenie do tematu i przypomnienie wiadomości dotyczących pola powierzchni i objętości graniastosłupów mogą służyć materiały z e-podręcznika wskazane wyżej.