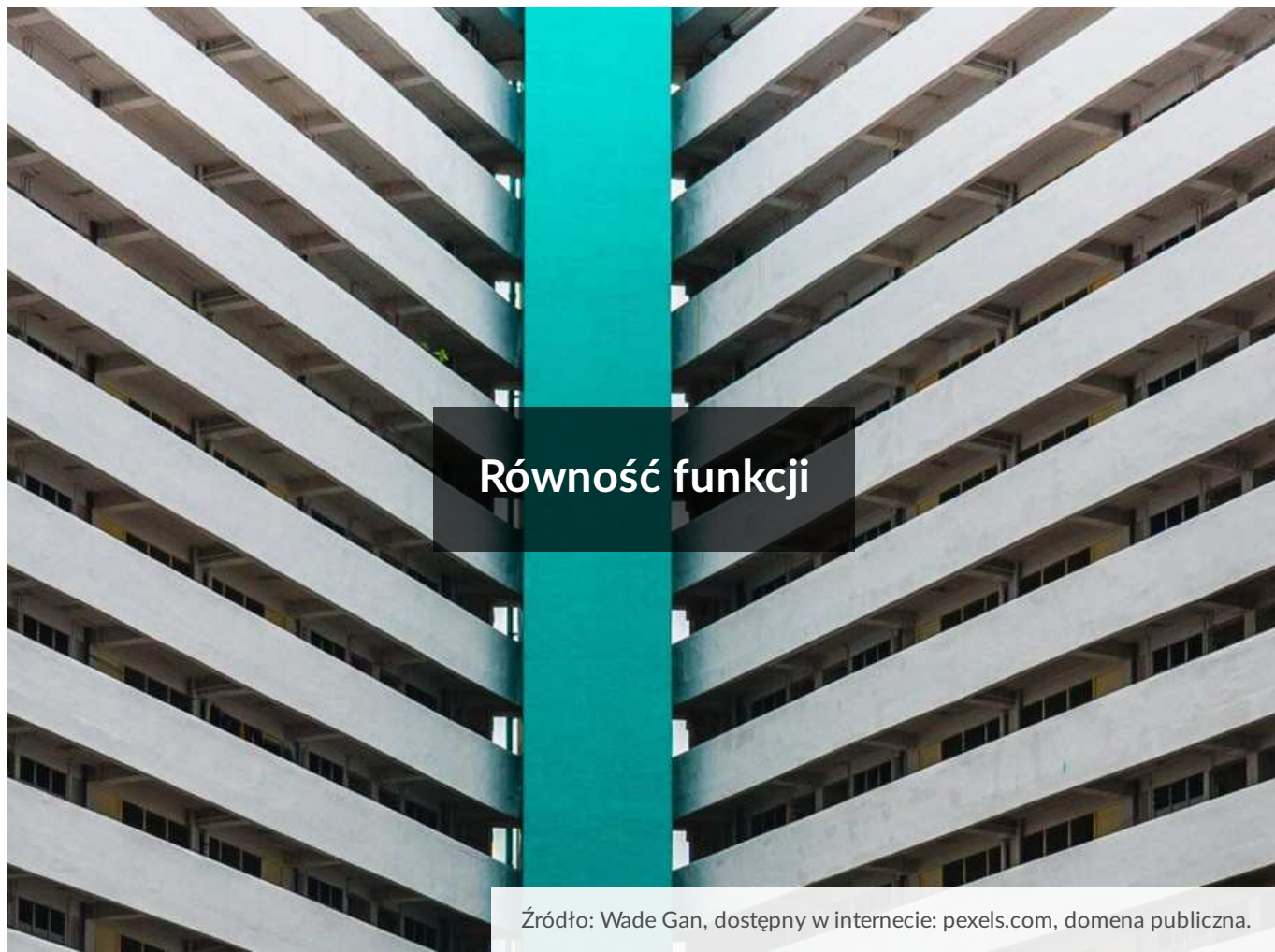




Równość funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równość funkcji

Źródło: Wade Gan, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

Czy dwie funkcje posiadające takie same dziedziny są zawsze funkcjami równymi?
Czy funkcje posiadające takie same zbiory wartości są zawsze funkcjami równymi?
Jakie warunki muszą być spełnione, aby dwie funkcje były równe?
Czy sposób opisu funkcji ma wpływ na ich równość?

Odpowiedzi na te pytania znajdziesz w poniższym materiale. Poznasz sposoby sprawdzania równości funkcji oraz nauczysz się uzasadniania równości funkcji.

Twoje cele

- Zbadasz równość dwóch funkcji.
- Sprawdzisz, czy dane funkcje są równe.
- Uzasadnisz równość dwóch funkcji.

Przeczytaj

Definicja: Funkcje równe

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest równa funkcji $g : X \rightarrow Y$, gdy dla każdego elementu $x \in X$ spełniony jest warunek $f(x) = g(x)$.

Równość funkcji $f : X \rightarrow Y$ i $g : X \rightarrow Y$ możemy zapisać symbolicznie:

$$(f = g) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} (f(x) = g(x)).$$

Zwrot „dla każdego” nazywamy kwantifikatorem ogólnym (dużym) i oznaczamy symbolem $\forall$.

Analizując definicję funkcji równych możemy zauważyć, że **funkcje równe** spełniają dwa warunki.

Warunek 1.

Dziedziny obu funkcji są takie same.

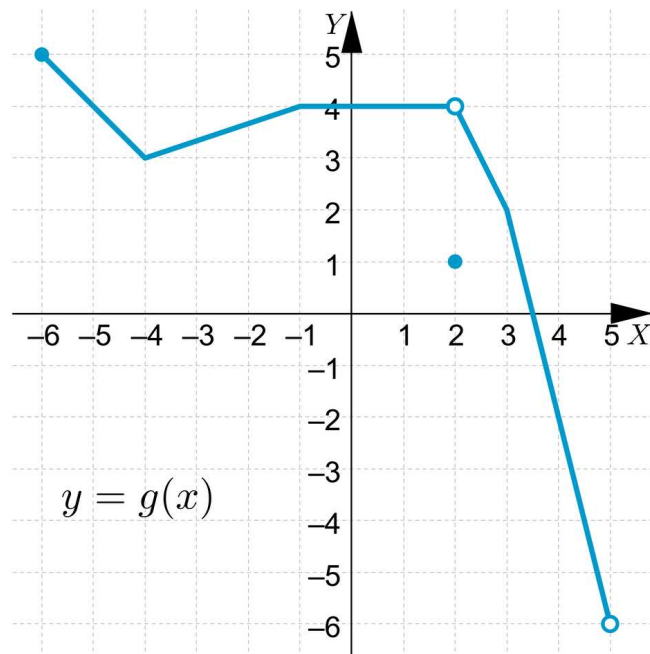
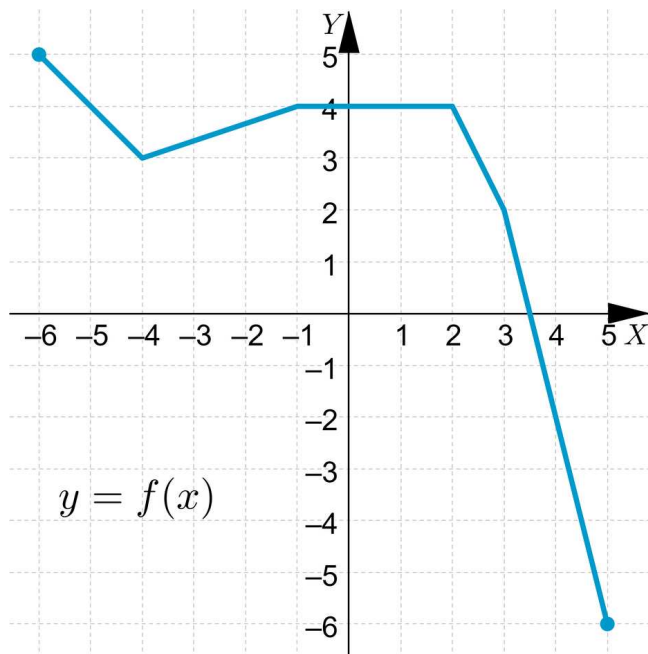
Warunek 2.

Dla tych samych argumentów funkcje przyjmują te same wartości.

W jaki sposób możemy sprawdzić równość dwóch funkcji liczbowych? Pokażemy to na kilku przykładach. Będziemy głównie korzystać z wykresów funkcji.

Przykład 1

Funkcje f i g opisane są za pomocą wykresów.



Sprawdźmy, czy funkcje te są równe.

Rozwiązanie:

Sprawdźmy, czy spełniony jest pierwszy warunek równości funkcji. W tym celu wyznaczmy dziedziny obu funkcji.

$$D_f = \langle -6, 5 \rangle$$

$$D_g = \langle -6, 5 \rangle$$

$$D_f \neq D_g$$

Funkcje f i g mają różne dziedziny.

Nie jest więc spełniony pierwszy warunek równości funkcji.

Zatem funkcje f i g nie są równe.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$$\{(-3, 2), (-2, 3), (-1, 4), (0, 5), (1, 6)\}.$$

Funkcja g opisana jest za pomocą tabelki.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	2	3	4	5	6	7

Sprawdźmy, czy te funkcje są równe.

Rozwiązanie:

Sprawdzimy, czy spełniony jest pierwszy warunek równości funkcji. Porównamy dziedziny obu funkcji.

$$D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1\},$$

$$D_g = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

$$D_f \neq D_g$$

Funkcje f i g mają różne dziedziny.

Nie jest więc spełniony pierwszy warunek równości funkcji.

Zatem funkcje f i g nie są równe.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = x + \sqrt{5} - 2, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja g opisana jest za pomocą wzoru.

$$g(x) = x + \frac{1}{\sqrt{5}+2}, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Wykażemy, że funkcje f i g są równe.

Rozwiązanie:

Aby wykazać, że funkcje f i g są równe musimy udowodnić spełnienie obu warunków równości funkcji.

Warunek pierwszy jest spełniony, ponieważ dziedziny obu funkcji są takie same.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ oraz } D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = D_g$$

Sprawdzamy, czy jest spełniony warunek drugi.

Przekształcimy wzór opisujący funkcję g .

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = x + \frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = x + \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \\ &= x + \frac{\sqrt{5}-2}{1} = x + \sqrt{5} - 2 \end{aligned}$$

Po usunięciu niewymierności z mianownika okazało się, że wzory opisujące funkcje f i g są identyczne.

Stąd wniosek, że dla dowolnego argumentu wartości funkcji f i g są jednakowe.

Zatem funkcje f i g są równe.

Przykład 4

Zbadamy, czy funkcje $f(x) = \frac{5 \cdot (x-3)}{x-3}$ i $g(x) = 5$ są równe.

Naszkieujemy wykresy tych funkcji i porównamy je.

Rozwiązanie:

Określimy dziedziny tych funkcji.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

Zauważamy, że $D_f \neq D_g$.

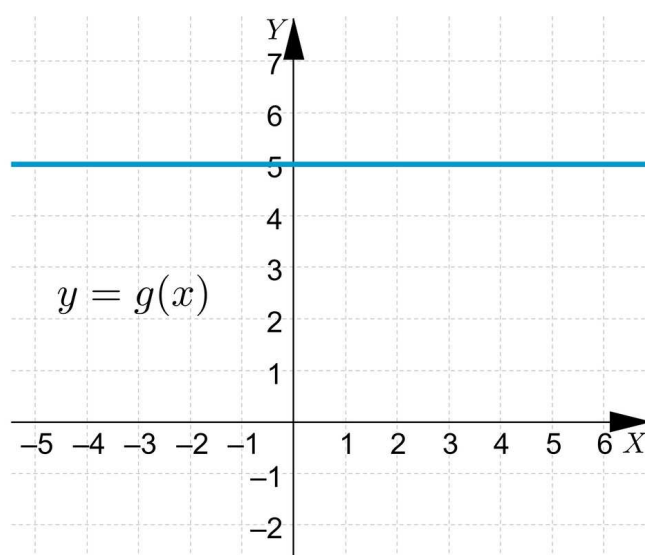
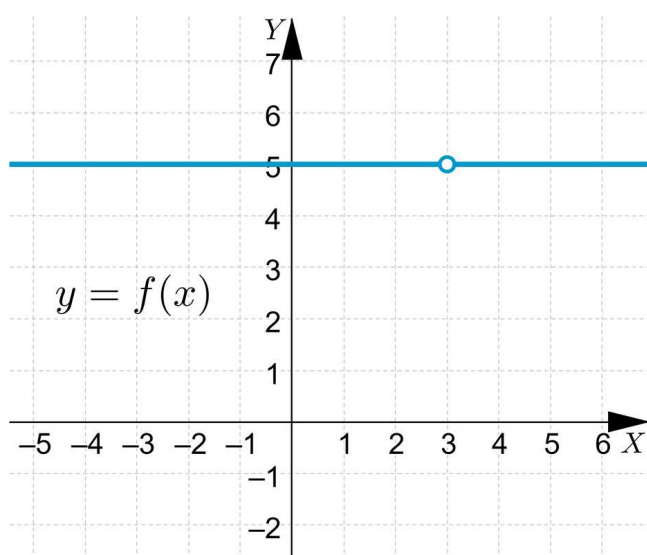
Stąd wniosek, że funkcje f i g nie są równe.

Wzór funkcji f możemy zapisać w prostszej postaci: $f(x) = 5$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Stąd wniosek, że funkcja f dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ przyjmuje wartość 5.

Funkcja g przyjmuje wartość 5 dla $x \in \mathbb{R}$.

Naszkieujemy wykresy obu funkcji.



Analizując wykresy funkcji f i g możemy zauważyć, że różnią się one jednym punktem.

Stąd wniosek, że funkcje f i g nie są równe.

Przykład 5

Wykażemy, korzystając z definicji, że funkcje f i g są równe.

$$f(x) = \frac{2x-4}{4x^2-16x+16}, g(x) = \frac{1}{2x-4}.$$

Rozwiązanie:

Wyznamy dziedziny obu funkcji.

Funkcja f – zapiszemy wyrażenie znajdujące się w mianowniku wzoru funkcji w postaci iloczynowej.

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$f(x) = \frac{2x-4}{(2x-4)^2}$$

Mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera. Zapisujemy to w następującej postaci:

$$2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{Stąd } D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Po skróceniu wzór funkcji f ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{2x-4}, \text{ gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Dziedziną funkcji g jest zbiór:

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Możemy zauważyć, że spełniony jest pierwszy warunek równości funkcji:

$$D_f = D_g.$$

Sprawdzimy, czy spełniony jest drugi warunek równości funkcji.

Po przekształceniu wzoru funkcji f otrzymaliśmy wyrażenie algebraiczne, które jest identyczne jak wzór funkcji g .

Okazało się, że wzory funkcji f i g są identyczne.

Stąd wynika, że dla dowolnego argumentu wartości funkcji f i g są jednakowe.

Funkcje f i g są równe.

Przykład 6

Wykażemy, że funkcje f i g **nie** są równe, jeśli:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}, g(x) = \frac{2x(x-2)}{4-2x},$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = 1.$$

Rozwiązanie:

Ad. a). Wyznamy dziedziny obu funkcji.

Dziedzina funkcji f .

Mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera.

Zapisujemy to w następującej postaci:

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{Zatem } D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Dziedzina funkcji g .

Mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera.

Zapisujemy to w sposób następujący:

$$4 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2 - x) \neq 0 \Leftrightarrow 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{Zatem } D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Możemy zauważyć, że spełniony jest pierwszy warunek równości funkcji.

$$D_f = D_g.$$

Sprawdzimy, czy spełniony jest warunek drugi. W tym celu przekształcimy tożsamościowo wzory opisujące obie funkcje.

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x, \text{ gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$g(x) = \frac{2x(x-2)}{4-2x} = \frac{2x(x-2)}{-2 \cdot (x-2)} = -x, \text{ gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Aby wykazać, że funkcje f i g nie są równe wystarczy znaleźć jeden argument, dla którego wartości funkcji są różne. Np. $x = 3$.

$$f(3) = 3,$$

$$g(3) = -3.$$

Zatem funkcje f i g nie są równe.

Ad. b). Wyznaczymy dziedziny obu funkcji.

Dziedzina funkcji f .

Mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera.

$$x \neq 0$$

$$\text{Zatem } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dziedzina funkcji g .

Funkcja g przyjmuje wartość 1 dla $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Zatem } D_g = \mathbb{R}.$$

Dziedziny obu funkcji są różne, czyli nie spełniony jest warunek pierwszy.

Funkcje f i g nie są równe.

Ważne!

1. Funkcje są równe wtedy, gdy mają takie same dziedziny i dla każdego argumentu należącego do tej dziedziny wartości funkcji są równe.
2. Funkcje nie są równe wtedy gdy mają różne dziedziny lub dla co najmniej jednego argumentu należącego do dziedziny mają różne wartości.

Słownik

funkcje równe

funkcje, które mają taką samą dziedzinę i dla każdego argumentu należącego do tej dziedziny wartości funkcji są równe

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane przykłady, następnie porównaj swoje rozwiązania z tymi, które są przedstawione w animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXgsLp5y>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równości funkcji.

Po przeanalizowaniu materiału przedstawionego w animacji wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

Polecenie 2

Sprawdź, czy funkcje f i g są równe.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^3}, \text{ gdy } x \in \{-3, -2, 1, 2\},$$

$$g(x) = x - 4, \text{ gdy } x \in \{-3, -2, 1, 2\}.$$

Polecenie 3

Wykaż, że funkcje f i g **nie** są równe.

$$f(x) = \sqrt{(3x-7)^2}, \text{ gdy } x < 0,$$

$$g(x) = 3x - 7, \text{ gdy } x < 0.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Niech $X = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$, $f(x) = 2 - x^2$ dla $x \in X$ oraz niech g będzie funkcją określoną na X za pomocą tabelki

x	-2	-1	0	3	4
y	-2	1	2	-7	-18

Czy funkcje f i g są równe?

☐ Tak

☐ Nie

Ćwiczenie 3



Zaznacz pary równych funkcji f i g .

☐ $f(x) = |2x - 1|$, $g(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

☐ $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$, $g(x) = x$

☐ $f(x) = 3 - \sqrt{x^2}$, $g(x) = 3 - x$

☐ $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$

Ćwiczenie 4



Dla jakiej wartości parametru a funkcje

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases} \text{ i } g(x) = |\operatorname{sgn} x|$$

są równe?

☐ $a = -1$

☐ $a = 0$

☐ $a = 1$

Ćwiczenie 5



Dla jakiej wartości parametru a funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{jeśli } x \neq 1 \\ a, & \text{jeśli } x = 1 \end{cases} \text{ i } g(x) = x^2 + x + 1$$

są równe?

☐ $a = -1$

☐ $a = 2$

☐ $a = -3$

☐ $a = 3$

Ćwiczenie 6



Wskaż liczby, dla których wartości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-2x|}{x}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 2, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases} \text{ i } g(x) = x - 2$$

są różne.

☐ 1☐ 2☐ 0☐ 3☐ -1

Ćwiczenie 7



Wskaż liczby, dla których wartości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1}, & \text{jeśli } x \notin \{-1, 1\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \end{cases} \text{ i } g(x) = \text{sgn}(x^2 - 1)$$

są różne.

☐ 0☐ 1☐ 2☐ -2☐ -1

Ćwiczenie 8



Połącz w pary równe funkcje f i g .

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$g(x) = |x - 3|$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x - 3}\right)^2$$

$$g(x) = |x - 3|^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

$$g(x) = x - 3, x \in \langle 3, +\infty \rangle$$

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równość funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada równość dwóch funkcji
- sprawdza, czy dane funkcje są równe
- uzasadnia równość dwóch funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rybi szkielet
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie tworzą rybi szkielet przedstawiający sposoby wyznaczania dziedziny funkcji opisanej za pomocą wykresu, zbioru par uporządkowanych, tabelki oraz wzoru.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje przemyślenia w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie”. Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów określania równości funkcji i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 - 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5- 8.
2. Zadanie dla chętnych:

Zbadaj, czy funkcje f i g są równe.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} \text{ i } g(x) = \left(\sqrt{x - 5}\right)^2.$$

Materiały pomocnicze:

[Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację na zajęciach podsumowujących wiadomości o funkcjach.