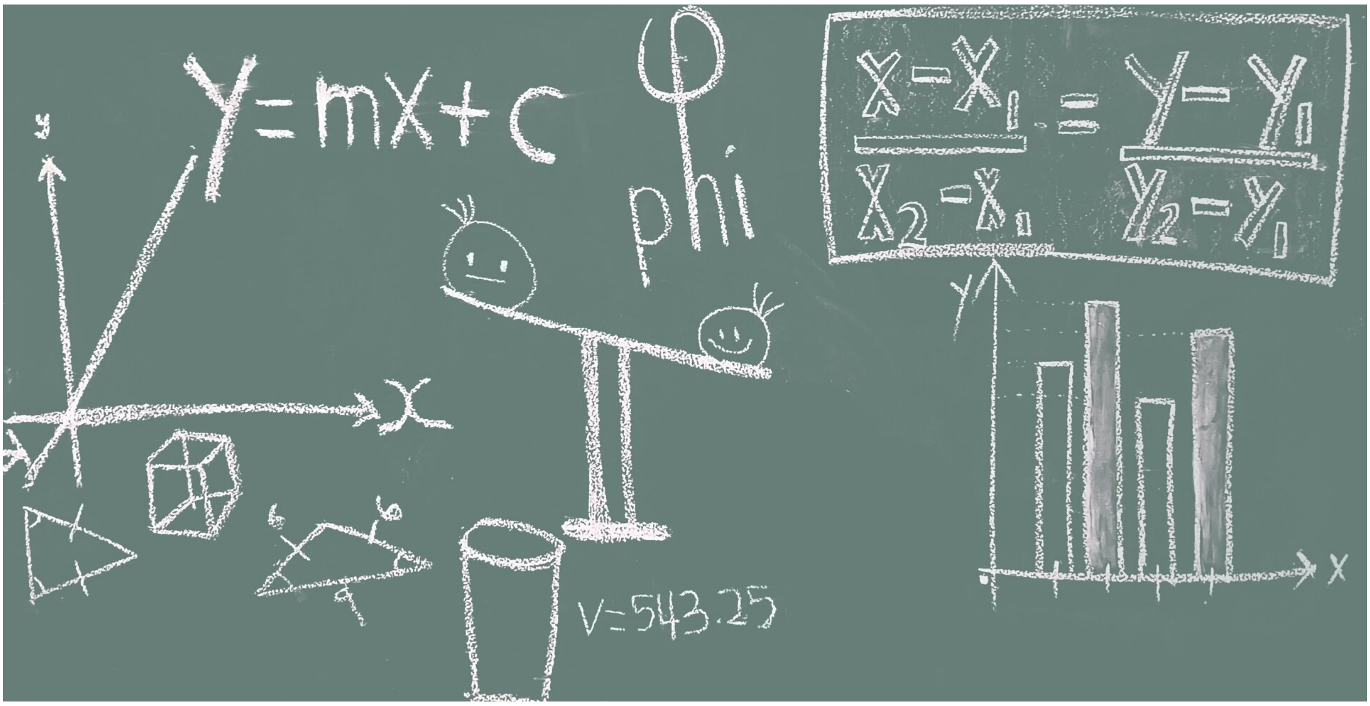

Działania na ciągach zbieżnych

Działania na ciągach zbieżnych

Źródło: Thomas Tucker, dostępny w internecie: unplash.com, domena publiczna.

Ciąg posiadający granicę, która jest liczbą rzeczywistą nazywamy ciągiem zbieżnym. W tym temacie zajmiemy się zagadnieniem arytmetyki granic ciągów zbieżnych. W szczególności sprawdzimy czy jeśli dodamy do siebie dwa ciągi zbieżne, to uzyskany w ten sposób ciąg też będzie zbieżny. Jeśli tak to jaka będzie jego granica? Zajmiemy się też między innymi różnicą, iloczynem oraz ilorazem dwóch ciągów zbieżnych oraz podamy przykłady ilustrujące wykorzystanie tych zagadanień do obliczania granic ciągów.

Twoje cele

- Dowiesz się kiedy suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym.
- Obliczysz granicę sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu dwóch ciągów zbieżnych.
- Poznasz zasady działań na granicach ciągów zbieżnych.

Przeczytaj

Suma i różnica ciągów zbieżnych

Twierdzenie: Suma i różnica ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne oraz

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = b,$$

to suma oraz różnica tych ciągów jest również ciągiem zbieżnym oraz

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

Przykład 1

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n+1}{n}$$

Mamy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Ponieważ ciągi $a_n = 2$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$ są zbieżne a ich granice są równe odpowiednio 2 i 0 więc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 + 0 = 2.$$

Przykład 2

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}$$

Ponieważ granica ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt[n]{a}$ dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a jest równa 1 więc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Iloczyn ciągów zbieżnych

Twierdzenie: Iloczyn ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne oraz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b,$$

to iloczyn tych ciągów jest również ciągiem zbieżnym oraz

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Przykład 3

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{n}\left(3 - \tfrac{2}{n}\right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) = 3 - 0 = 3$ więc z powyższego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\left(3 - \tfrac{2}{n}\right) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Własność: Iloczyn ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera

Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ natomiast ciąg (b_n) jest ograniczony, to

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę ciągu

$$a_n = \tfrac{\sin(2n+1)}{n}.$$

Ponieważ ciąg $b_n =\sin\,(2n+1)$ jest ograniczony (wynika to z faktu, że zbiór wartości funkcji sinus jest ograniczony) oraz granica ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest równa 0 więc z powyższej własności mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{\sin(2n+1)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} \cdot \sin\,(2n+1) = 0$$

Własność: Iloczyn ciągu przez liczbę

Jeśli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ oraz $c \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{n\to+\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n = c \cdot a.$$

Przykład 5

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = 7\sqrt[n]{n}$$

Ponieważ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc z powyższej własności mamy

$$\lim_{n\to+\infty} 7\sqrt[n]{n} = 7\cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 7\cdot 1 = 7.$$

Iloraz ciągów zbieżnych

Twierdzenie: Iloraz ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0,$$

to iloraz tych ciągów jest również ciągiem zbieżnym oraz

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Przykład 6

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n^2+n-1}{3n^2+2}$$

W celu obliczenia granicy ciągu będącego ilorazem dwóch wielomianów, wyciągamy w liczniku i mianowniku najwyższą potęgę n przed nawias.

$$\frac{2n^2+n-1}{3n^2+2} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 2+0+0 = 2$$

oraz

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3+\frac{2}{n^2}\right) = 3+0 = 3$$

więc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n-1}{3n^2+2} = \frac{2}{3}.$$

Przykład 7

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n+5}{n^2+1}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie wyciągamy najwyższą potęgę licznika i mianownika przed nawias.

$$\frac{2n+5}{n^2+1} = \frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{5}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

więc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+5}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 0 \cdot 2 = 0.$$

Słowniczek

granica ciągu

liczba rzeczywista g taka, że dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Poniżej znajduje się galeria zdjęć interaktywnych, na której przedstawiono w jaki sposób można obliczyć granicę sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych. Zapoznaj się z przedstawionymi w niej przykładami a następnie wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.

Polecenie 2

Korzystając z twierdzeń o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych, obliczyć granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\left(5\sqrt[n]{3}-3\sqrt[n]{5}\right)$$

Polecenie 3

Korzystając z twierdzeń o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych, obliczyć granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)\right]$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na ciągach zbieżnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna twierdzenie o sumie, różicy, iloczynie oraz ilorazie ciągów zbieżnych
- stosuje twierdzenie o sumie, różicy, iloczynie oraz ilorazie ciągów zbieżnych do obliczania granic ciągów zbieżnych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza materiału źródłowego (porównawcza);

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Działania na ciągach zbieżnych” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Poniżej znajduje się galeria zdjęć interaktywnych, na której przedstawiono w jaki sposób można obliczyć granicę sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych. Zapoznaj się z przedstawionymi w niej przykładami a następnie wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Działania na ciągach zbieżnych”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

Własności ciągów zbieżnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Działania na ciągach zbieżnych”.